

UNIVERSITÉ DE LAUSANNE
FACULTÉ DES LETTRES

Maîtrise universitaire ès Lettres en
Informatique et Méthodes Mathématiques

Un modèle énergétique-spatial de réseau social

par

Egloff Mattia

sous la direction du Professeur Marco Tomassini

Session d'automne 2012

Table des matières

1	Introduction	2
2	Réseaux et modèles	6
2.1	Les réseaux	6
2.2	Mesures	7
2.3	Types de réseaux	13
2.4	Types de modèles	16
3	Les données	19
3.1	La structure des réseaux sociaux	19
3.2	La structure de l'espace	23
4	Les modèles spatiaux aléatoires	27
4.1	Le modèle à rayon fixe	28
4.2	Petit changement : un rayon normalement distribué	32
5	L'énergie	36
5.1	Modèle avec énergie fixe	37
5.2	L'énergie normalement distribuée	39
5.3	Comparaison des modèles	41
5.4	Résumé	46
5.5	Un modèle combiné	46
6	Le modèle énergéico-spatial de réseau social	48
6.1	Le choix	48
6.2	La création des arêtes	49
6.3	L'énergie, la vision et le choix	51

6.4	Changement des paramètres et mesures	52
6.5	Un réseau énergétique-spatial	59
6.6	Pertinence du modèle	61
7	Idées pour une recherche future	63
7.1	Faiblesses et améliorations possibles	63
7.2	Un modèle énergétique-spatial évolutif	66
8	Conclusions	70

Table des figures

2.1	Réseau de collaboration d'acteurs de film.	7
3.1	Distributions des distances	24
4.1	Calcul du clustering	29
4.2	Réseau spatial aléatoire	30
4.3	Réseau spatial aléatoire avec un rayon normalement distribué	33
5.1	Réseau spatial aléatoire utilisant l'énergie	38
5.2	Réseau spatial aléatoire avec l'énergie normalement distribuée	40
5.3	Distributions des distances des arêtes	43
5.4	Distributions du degré des arêtes	45
6.1	Degré moyen en fonction du choix	53
6.2	Degré moyen en fonction de l'énergie	53
6.3	Degré moyen en fonction de la vision	53
6.4	Mesures en fonction du choix	54
6.5	Mesures en fonction de l'énergie	54
6.6	Mesures en fonction de la vision	54
6.7	Distances physiques et le choix	56
6.8	Distances physiques et la vision moyenne	56
6.9	Distances physiques et l'énergie moyenne	56
6.10	Distances sur le réseau et le choix	57
6.11	Distances sur le réseau et la vision moyenne	57
6.12	Distances sur le réseau et l'énergie moyenne	57
6.13	Distances sur le réseau et la distance physique maximale	58
6.14	Distances sur le réseau et la distance physique moyenne	58

6.15 Réseau énergétique-spatial avec choix	59
6.16 Distribution de degré du modèle énergétique-spatial	61
6.17 Distribution des distances du modèle énergétique-spatial	61

Liste des tableaux

3.1	Propriétés des réseaux sociaux	20
3.2	Résumé des propriétés des réseaux sociaux	22
4.1	Réseau spatial aléatoire	31
4.2	Réseau spatial aléatoire avec un rayon normalement distribué	34
5.1	Réseau spatial aléatoire en utilisant l'énergie	39
5.2	Réseau spatial aléatoire avec l'énergie normalement distribuée	41
6.1	Réseau énergétique-spatial avec choix	60

1

Introduction

L'étude des réseaux est essentiellement l'étude de comment se structure le monde qui nous entoure. Il n'en a pas toujours été ainsi. En effet, l'idée de réseau est née comme moyen de résoudre des problèmes mathématiques, souvent liés à la logistique. Le premier exemple d'utilisation du concept de réseau comme outil mathématique se retrouve chez Euler, en 1735, dans sa résolution du problème des ponts de Königsberg¹. Le problème consistait dans la question de savoir si toutes les parties de la ville sont atteignables en traversant une seule fois chacun de ses sept ponts. Pour sa résolution, Euler représente les parties de la ville comme des nœuds, et les ponts comme des arêtes.

Les réseaux sont longtemps restés des outils des mathématiques. Après la Deuxième Guerre mondiale, avec le premier modèle de réseaux a été créé par Erdős et Rényi² on s'intéresse aux réseaux comme objets d'étude à part entière et pas seulement comme outils. En effet, les deux pères de ce modèle, cités ci-dessus, ont alors étudié les propriétés des réseaux impliqués par leur modèle. Leurs résultats ont donné lieu aux premières mesures de propriétés structurelles des réseaux.

Une de ces mesures, à la fin des années 1960, a intéressé Milgram et Travers³. Il s'agit du degré de séparation moyen⁴ entre deux personnes prises au hasard. Leur expérience consistait à envoyer des lettres à des personnes sélectionnées aléatoirement, avec pour consigne de faire parvenir cette lettre à un habitant de Boston en ne

1. [23, p.169], pour des approfondissements veuillez consulter[27]

2. [5, p.2],[16]

3. [26]

4. Le nombre de nœuds à traverser, en passant par des arêtes qui les connectent.

l'envoyant qu'à des personnes proche, à des amies ou membres de la famille. Les lettres arrivées à destination sont en moyenne passées par six nœuds. À partir de là, l'étude de réseaux pouvant être observés dans la réalité est devenue une priorité dans plusieurs champs de recherche académique. Grâce à l'avènement de l'informatique, il a été possible d'étudier les réseaux à une échelle plus large et de manière plus systématique. Ces études ont permis de créer des typologies de réseaux et de nouveaux modèles associés. Ces derniers sont au nombre de quatre et représentent les types suivants : sociaux, biologiques, technologiques et ceux du savoir⁵.

Dans le cadre de mon travail, le primat va être accordé aux réseaux de type sociaux. Le but de la recherche sur les réseaux sociaux est de connaître la structure de la société, donc de voir comment les individus entrent en relation. Pour y parvenir, il existe plusieurs possibilités cross-fertilisantes. D'une part, il est possible de faire des recherches qui se basent sur l'observation des personnes et dégager un réseau réel. Dans ce cas, un certain nombre de problèmes sont rencontrés, car l'observation du réseau social ne peut que difficilement prétendre être exhaustive. D'autre part, il est possible de faire des modèles mathématiques à partir des réseaux étudiés en réalité qui essaient de reconstruire des dynamiques donnant la structure particulière de ces réseaux. Par conséquent, la meilleure chose à faire serait d'utiliser les deux approches espérant pouvoir les améliorer en parallèle. De manière à ce que les recherches sur l'état réel des choses puissent être améliorées par les hypothèses créées par les modèles, et que ces derniers donnent des résultats toujours plus réalistes.

Les réseaux sociaux ont pour particularité d'être créés et constitués par des individus, considérés comme des nœuds et leurs interrelations, qui définissent les arêtes. Par contre, dans les modèles mathématiques existants, à part de rares exceptions, voir [29] et [8], subsiste un problème majeur qui réside dans non prise en compte de l'environnement au sein duquel les individus évoluent et leurs interrelations se réalisent. Ici nous sommes confrontés aux limites de ces modèles. D'un point de vue analytique, ces derniers explicitent des propriétés des propriétés intrinsèques à la structure des réseaux sociaux, comme le phénomène des petits mondes, la présence de nœuds plus connectés que d'autres notamment. Nonobstant ces apports subsiste un problème et non des moindres dans la conception des individus consi-

5. [23, p.174]

dérés comme des nœuds. En effet, d'une manière philosophique au sens large, il est nécessaire, pour que l'existence d'un individu soit, d'intégrer cette dernière dans un cadre plus englobant, dit l'environnement.

Dès lors, il s'agira d'intégrer la notion d'environnement, dans la modélisation des réseaux sociaux. Pour ce faire, les individus seront insérés dans un espace, qui mathématiquement équivaut à l'idée d'environnement.

Le but de ce travail est donc de présenter un nouveau modèle. Ce modèle sera basé sur un aspect spatial et devra créer un réseau avec les propriétés d'un réseau social. Pour y parvenir, il sera d'abord question de comprendre ce que sont les mesures qui décrivent un réseau, comment elles s'articulent par rapport à un réseau social et de la spatialité. Comprendre ces mesures qui décrivent un réseau est important pour tout le reste de l'emprise, en effet, si ces mesures ne sont pas connues il est impossible de comparer le modèle mathématique aux réseaux réellement existants. C'est également pour cette raison qu'il faut en début du travail présenter les réseaux sociaux et l'espace dans lequel ils sont sensés être modélisés.

Nonobstant, que la spatialité des réseaux sociaux, soit peu étudiée, il y a aucun doute que les acteurs sociaux sont inscrits dans un environnement. Cet environnement est dans les modèles présentés mathématiquement modélisé par un espace, donc il est essentiel de l'étudier pour dans un deuxième temps comprendre certaines propriétés des modèles qui utilisent cet espace. Pour comprendre comment créer des modèles spatiaux, les réseaux spatiaux aléatoires seront présentés. Ces derniers sont issus du modèle le plus classique de réseau qui utilise l'espace pour limiter les connexions des nœuds qui y sont inscrits. C'est pour cela qu'il est essentiel de savoir comment ce modèle fonctionne pour pouvoir en créer d'autres.

Ce modèle sera ensuite modifié pour essayer de se rapprocher d'un réseau social. D'abord, il sera question de changer la distribution du rayon qui, dans ces modèles, limite la connexion. Puis la notion d'énergie sera présentée qui remplace dans un premier temps le rayon dans sa fonction. Donner aux nœuds une certaine énergie qu'ils utilisent pour tisser des liens entre eux est évidemment plus proche de l'idée de nœud vu comme acteur social. Par contre, cette énergie en soi ne change pas de beaucoup le modèle spatial aléatoire. Il est donc nécessaire de changer la création des liens, et donc donner lieu à un nouveau modèle pour s'approcher de la création

de réseaux sociaux.

Ce modèle est ici appelé modèle énergéico-spatial, parce qu'il utilise les notions d'énergie et de rayon, même si cette dernière est modifiée quelque peu. Dans cette version modifiée de rayon, celui-ci devient la vision des acteurs, donc un paramètre définissant la distance spatiale d'action qu'un nœud a. Le modèle énergéico-spatial nécessite aussi d'un autre paramètre, celui du choix qui ajoute de l'aléatoire dans sa création. Donc les nœuds dans ce modèle ont une certaine énergie, une certaine vision, et une espèce de choix, ce qui les approche d'une idée d'acteur social. Avec des nœuds ainsi définis, le modèle énergéico-spatial permet de créer des structures de réseaux sociaux avec des règles assez simples. Finalement, des idées seront discutées sur l'amélioration possible de ce dernier modèle. En effet, il est important de réfléchir comment un modèle peut être changé.

Note technique

J'ai écrit un logiciel en JAVA qui a comme fonction principale de calculer les réseaux qui sont formés par les modèles décrits dans ce travail, et de calculer les valeurs qui en décrivent la structure. Tous les réseaux pris comme exemples pour illustrer les résultats des modèles présentés ont été calculés par ce logiciel. En outre à la sortie du calcul d'un réseau sont disponibles des fichiers de résumé des mesures principales, une image du réseau créé, et un fichier graphml, qui résume toutes les propriétés des nœuds et des arêtes du réseau produit. Les mesures produites ont été contrôlées par le logiciel d'analyse de réseaux Gephi, et par le paquet igraph qui remplit la même fonction de ce dernier dans le langage d'analyse statistique R. J'ai aussi préparé des script pour R et pour bash, capables d'extraire certaines informations du fichier graphml ou le rendre lisible par R, et d'automatiser le calcul des graphiques utilisés dans ce travail. Tous ces fichiers sont enregistrés sur le CD disponible dans l'annexe.

2

Réseaux et modèles

Dans cette section seront abordés plusieurs points, indispensables à la compréhension de la suite du travail. Dans un premier temps, il est question de décrire et de comprendre ce qu'est un réseau et les mesures explicitant la structure des réseaux. Il s'agit du nombre de nœuds et d'arêtes du degré moyen, de la distribution de degré, du clustering, de l'assortativité, de la modularité et des communautés. Dans un second temps, les types de réseaux seront survolés. Ils sont au nombre de quatre, les réseaux biologiques, les réseaux technologiques, les réseaux du savoir et les réseaux sociaux. In fine, ce chapitre va déboucher sur le survol de différents modèles existants, les réseaux aléatoires, les réseaux expliquant les petits mondes, les réseaux invariants d'échelle, et les réseaux spatiaux.

2.1 Les réseaux

Les réseaux sont formés par des nœuds et des arêtes. Les nœuds sont des points de connexion. Les arêtes sont les connexions elles-mêmes. Deux nœuds connectés par une arête sont dits voisins, ou occasionnellement dans ce travail, amis. Par exemple, il est possible de prendre des acteurs comme nœuds et de tracer une arête s'ils sont apparus dans un film ensemble. Dans le cas de cet exemple, étudié par Barabási et Albert[4], il y a 1342595 nœuds et 382219 arêtes, une de ces représentations graphiques est visible dans la figure ci-dessous.

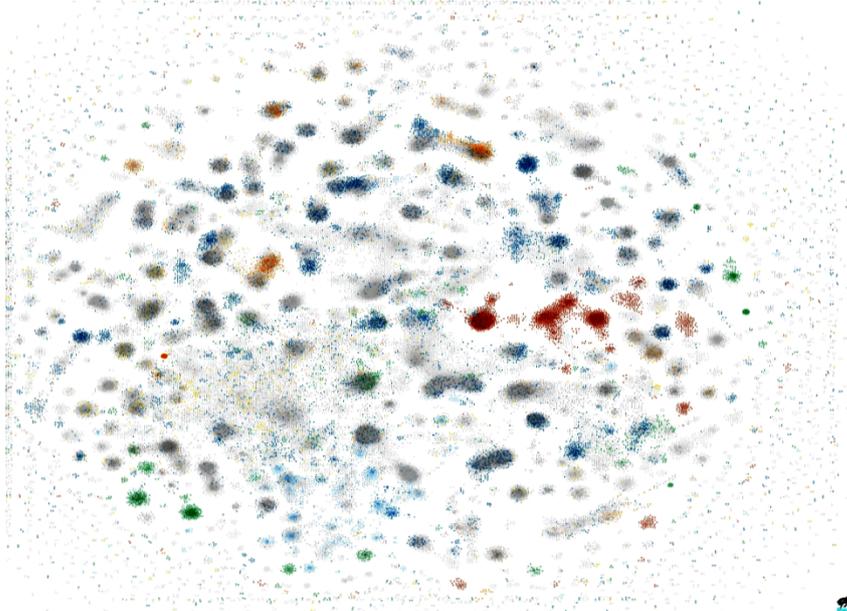


FIGURE 2.1 – Réseau de collaboration d’acteurs de film ¹.

Il est important de noter que les réseaux traités dans le cadre de ce travail ne sont ni dirigés ni pondérés. En effet, d’une part, l’idée qui rend compte des liens dans les modèles de réseaux sociaux est l’amitié, qui dans ce travail n’est ni univoque, ni mise en valeur. Ce choix a été fait dans un souci de simplicité. C’est pour cette raison que les réseaux avec plusieurs types de nœuds et/ou arêtes ont été écartés. Il est à noter que les mesures présentées dans la suite de ce chapitre ne sont valables que pour le type de réseau choisi.

2.2 Mesures

En considérant l’image présentée en début du chapitre, il est évident que la structure du réseau ne se donne pas à voir par la simple observation de sa représentation graphique. Dès lors, pour pallier à ce problème, des mesures ont été élaborées. Ces mesures permettent de rendre compte de la structure d’un réseau, de plusieurs points de vue. Un point de vu global envisage le nombre de nœuds et d’arêtes, et la distribution du degré et sa moyenne et permet d’avoir une idée sur l’intensité de connexion dans le réseau. Un point de vue plus local, avec le clustering et l’assortativité, permet de décrire les relations entre voisins. La mesure de la modularité

1. [19, Image 5]

est également introduite. Elle permet de commenter la pertinence des communautés détectées au sein du réseau. Finalement seront présentés les mesures de la distance, qui donnent une taille au réseau, et décrivent la centralité et son inverse l'excentricité des nœuds.

Le problème majeur associé à ces mesures réside dans le fait qu'il n'est pas possible de savoir à quel degré ces mesures sont pertinentes². En effet, elles ont été créées pour décrire certaines propriétés de l'objet étudié, mais il n'est pas possible de savoir s'il n'y a pas d'autres mesures qui donneraient des autres informations plus utiles sur les réseaux. Toutefois, ces mesures étant les seules existantes, pour le moment, il est essentiel de les utiliser pour pouvoir comparer des réseaux.

2.2.1 Nombre de nœuds et d'arêtes

Les mesures les plus évidentes sont le nombre de nœuds, noté n , et le nombre d'arêtes, dénoté m . Ces deux valeurs numériques offrent des informations sur le réseau. La première information concerne l'intensité de connexion entre les nœuds. En effet, potentiellement, tout nœud peut se connecter à $n - 1$ autre nœud, donc si $m = \frac{(n-1) * n}{2}$ le réseau est complètement connecté. Dès lors, il est possible d'en déduire le degré moyen, c'est-à-dire le nombre moyen d'arêtes qui se connectent à un seul nœud³ : $\bar{d} = \frac{2m}{n}$. Évidemment, si le degré est uniforme sur tous les nœuds, la valeur \bar{d} sera aussi le nombre d'arêtes auxquelles chaque nœud est connecté. Cependant, cela n'est pas généralement le cas, et il est donc essentiel de connaître la distribution que le degré prend autour de sa moyenne.

2.2.2 La distribution de degré

La distribution de degré permet de voir comment les nœuds sont connectés quantitativement. Elle quantifie donc pour chaque degré sa fréquence de présence dans le réseau et donne une information supplémentaire, par rapport au degré moyen, notamment comment les nœuds sont distribués autour de celui-ci. Par exemple, il est possible de voir grâce à cette distribution si, dans le réseau, il y a beaucoup de

2. [23, p.179]

3. Le multiplicateur 2 est nécessaire parce que dans ce travail les réseaux traités ne sont pas dirigés.

nœuds très peu connectés et peu de nœuds avec un degré énormément plus grand, ou alors si les degrés des nœuds sont distribués équitablement.

Bien que l'information donnée par la distribution de degré soit importante, d'autres indicateurs sont nécessaires pour savoir si une relation entre deux nœuds influence celle qu'ils entretiennent avec un troisième. Ce problème sera résolu par la mesure du clustering.

2.2.3 Le clustering

Le clustering désigne la mesure, selon la définition de Newman⁴, qui reflète combien de relations triangulaires il y a entre les nœuds par rapport à toutes celles qui seraient possibles :

$$C = \frac{3 * \text{nombre de triangles dans le réseau}}{\text{nombre de nœuds connectés en triplètes}}$$

L'autre définition de clustering qui existe, est notamment utilisée par Watts et Strogatz, donne la fraction des amis d'un nœud qui sont amis entre eux par rapport au nombre total de ses amis⁵. Le clustering global du réseau est, simplement, la moyenne du clustering local de chaque nœud⁶ :

$$\bar{C} := \frac{1}{n} \sum_i C_i$$

avec :

$$C_i := \frac{\text{nombre de triangles connectés à } a_i}{\text{nombre de triplettes centrées sur } a_i}$$

avec : a_i = nœud i , et une triplète étant un ensemble de trois nœuds dont deux sont connectés

Dans ce travail, la seconde définition de cette mesure est utilisée. Les valeurs du clustering sont toujours positives. Une valeur nulle indique que le réseau ne contient aucun triangle. Sinon, elle équivaut à la moyenne des clusterings individuels des nœuds. Plus cette mesure est haute, plus les nœuds sont connectés en relation triangulaire.

4. [23, p.183]

5. [28, p.441]

6. [23, p.184]

Dans le cas d'un réseau d'amis, cette mesure permet de mettre en exergue le nombre relatif d'amis communs. Le clustering est la mesure qui permet de déterminer si les nœuds sont connectés en groupe, mais il ne permet pas de savoir si les nœuds se connectent plutôt à des nœuds qui ont le même degré qu'eux ou non.

2.2.4 L'assortativité

L'assortativité est la mesure de la prédisposition des nœuds à se connecter entre nœuds de même degré⁷. Elle est aussi appelée la corrélation de Pearson entre le degré des nœuds connectés. Sa définition mathématique est la suivante :

$$as := \frac{\frac{\sum_i^m deg(e_s) * deg(e_d)}{m} - \left(\frac{\sum_i^m deg(e_s) + deg(e_d)}{2m} \right)^2}{\frac{\sum_i^m deg(e_s)^2 + deg(e_d)^2}{2m} - \left(\frac{\sum_i^m deg(e_s) + deg(e_d)}{2m} \right)^2}$$

avec :

$deg(e_s)$ = degré du nœud source de l'arête e_s .

$deg(e_d)$ = degré du nœud destination de l'arête e_s .

m = nombre d'arêtes. On imagine en effet une direction aux arêtes pour faire ce calcul.

Cette mesure peut prendre des valeurs entre -1 et 1 . Si elle donne 0 , il n'y a aucune corrélation entre le degré des nœuds connectés. Si la corrélation est négative, cette valeur l'est aussi et on parle de réseau dissortatif. Si, au contraire, elle est positive, le réseau est défini comme assortatif. La valeur absolue de cette mesure donne la force de la corrélation positive ou négative.

L'assortativité et le clustering mesurent des relations de voisinage, par contre elles ne donnent aucune idée sur les distances entre les nœuds.

2.2.5 Les distances

Il existe plusieurs manières de mesurer la distance. La plus naturelle étant définir la distance entre deux nœuds par le nombre d'arêtes empruntées pour se rendre d'un nœud à l'autre. Évidemment, il y a plusieurs chemins pour arriver de A à B dans un

7. [23, p.195]

réseau qui n'est pas un arbre. La longueur de ces chemins est virtuellement limitée vers le haut que par le nombre d'arêtes. Par conséquent, la mesure qui doit être considérée est celle de la distance la plus courte d'un nœud à un autre. La distance du plus court chemin est donc définie :

$$dpc(i, j) = \min_{c_{i,j}} dist(c_{i,j})$$

où $c_{i,j}$ est un chemin qui connecte les deux nœuds et $dist(c_{i,j})$ est le nombre d'arêtes qui séparent le nœud i et le nœud j sur le chemin $c_{i,j}$. À partir de là, d'autres indicateurs peuvent se définir. La plus directe est la moyenne des chemins les plus courts sur tout le réseau, défini :

$$\overline{dcp} = \frac{1}{n^2} \sum_{ij} dpc(i, j)$$

L'excentricité d'un nœud aussi est définie à partir du chemin le plus court. Elle est définie comme la distance maximale trouvée entre tous les chemins les plus courts qui permettent de joindre les autres nœuds dans le réseau :

$$ecc(i) = \max_j dpc(i, j) = \max_j \min_{c_{i,j}} dist(c_{i,j})$$

Si l'excentricité de tous les nœuds est calculée, il est possible de définir le rayon du réseau, qui est égal à la valeur de l'excentricité minimale entre tous les nœuds :

$$rayon = \min_i ecc(i)$$

. À l'inverse l'excentricité maximale est appelée diamètre et correspond au chemin le plus long entre tous les chemins les plus courts dans le réseau :

$$diamètre = \max_i ecc(i) = \max_{i,j} dpc(i, j)$$

L'intérêt de ces quatre mesures est qu'elles donnent toutes les indications nécessaires sur les distances dans le réseau. À l'inverse, à partir des chemins les plus courts il est possible de définir des mesures de la proximité des nœuds, appelés centralités.

La centralité

Il y a différents types de centralité, ils sont tous définis à partir de la notion du chemin le plus court. Plus précisément, à partir du nombre des chemins les plus courts. Ce nombre dénoté $\sigma_{i,j}$ est donc égal au nombre de chemins les plus courts par lesquels il est possible d'aller du nœud i au nœud j . Aussi on dénote $\sigma_{k,j}(i)$ les chemins de k à j qui passent par i . Le nombre de chemins les plus courts partant d'un nœud pour revenir sur lui même est égal à 1, donc $\sigma_{i,i} = 1$. À partir de là, les centralités sont définies ainsi ⁸ :

$$C_C(i) = \frac{1}{\sum_j d_{pc}(i,j)} \quad \text{est la centralité de proximité.}$$

$$C_G(i) = \frac{1}{\max_j d_{pc}(i,j)} \quad \text{est la centralité de graphe.}$$

$$C_S(i) = \sum_{k \neq i \neq j} \sigma_{k,j}(i) \quad \text{est la centralité sous stress.}$$

$$C_B(i) = \sum_{k \neq i \neq j} \frac{\sigma_{k,j}(i)}{\sigma_{k,j}} \quad \text{est la centralité d'intermédiation.}$$

En conséquence, une valeur haute de centralité est le signe qu'un nœud est peu distant des autres nœuds, ou qu'il est traversé par un nombre important de chemins les plus courts.

2.2.6 La modularité et les communautés

La dernière mesure ici présentée est la modularité. Elle mesure la densité de connexion à l'intérieur d'une communauté de nœuds par rapport à la densité de connexion vers l'extérieur d'elle-même⁹. Ces communautés ne sont pas évidentes à trouver sur un réseau. La méthode pour les détecter utilisée dans ce travail est celle d'une optimisation de la modularité par rapport au choix d'appartenance des nœuds à une communauté. Mathématiquement la modularité est définie :

$$Q = \sum_{i=0}^c (e_i - a_i)$$

8. [9, p.3]

9. [7, p.2]

avec :

e_i : la fraction des arêtes intérieures à la communauté i .

a_i : la fraction des arêtes qui connectent les nœuds internes à la communauté aux nœuds externes i .

c : le nombre de communautés.

L'algorithme utilisé pour créer ces communautés est celui dit de Louvain¹⁰, qui optimise la modularité en testant l'appartenance des nœuds à celles-ci. Il est cependant à noter qu'il y a différentes façons de détecter les communautés et que l'optimisation de la modularité n'en est qu'une. Les discussions sur les avantages et inconvénients de ces manières perdurent¹¹, pour une discussion plus approfondie voir [17].

2.2.7 Synthèse

Il est important de connaître les mesures présentées dans ce chapitre pour deux raisons principales, la première étant qu'elles caractérisent la structure des réseaux. En effet, la grande partie des mesures présentées sera utilisée dans les chapitres à suivre, à savoir : les mesures liées au degré, le clustering, l'assortativité et la modularité et aussi certaines des mesures liées aux distances sur le réseau. Les exceptions sont les mesures de la centralité et de l'excentricité qui sont liées intimement aux nœuds qui sont donc à un niveau d'analyse qui dans ce travail n'est pas utilisé. La deuxième raison de connaître ces mesures est qu'elles permettent de créer des typologies des réseaux.

2.3 Types de réseaux

Différents réseaux qui montrent les mêmes mesures peuvent être groupés dans une typologie de réseau. Dans son recueil d'articles publié en 2003¹², Newman propose quatre types de réseaux : biologiques, technologiques, d'information, du savoir et sociaux. Comme il le montre, ces typologies ont des propriétés qui ca-

10. [7]

11. [5, p.10]

12. [23, p.174]

ractérisent les réseaux réunis par chacune et qui les différencient entre elles ¹³. Par contre, plutôt que catégoriser un réseau par les mesures structurelles qu'il montre, il est possible de créer ces catégories à partir des objets réels qui sont représentés par les nœuds et des relations qui le sont par les arêtes. Ces deux approches donnent des catégories équivalentes, ce qui est exploité dans la quête du modèle recherché par ce travail. Avant de la poursuivre, il faut connaître les types de réseaux présentés par Newman parce que l'un de ces types est les réseaux sociaux. Ils sont donc présentés ci-dessous.

2.3.1 Les réseaux biologiques

Les réseaux biologiques se rencontrent, comme leur nom l'indique, dans les milieux naturels. Les exemples plus connus sont : les réseaux des chaînes alimentaires, le réseau métabolique, le réseau de régulation génétique, le cerveau vu comme réseau de neurones ¹⁴. Tous ces réseaux ont pour dénominateur commun que leurs nœuds sont de nature biologique. Malgré la présence de ce dénominateur commun, il est important de souligner que les arêtes représentent des relations aussi différentes que variées. Par exemple, au sein d'une chaîne alimentaire, une arête se fait si un nœud (un être vivant) est mangé par un autre, tandis que dans le cerveau une arête exprime une connexion synaptique. Nonobstant cette différence, les propriétés de ces réseaux sont assez similaires ¹⁵.

2.3.2 Les réseaux technologiques

Les réseaux de type technologiques ¹⁶ permettent le transport d'information ou de marchandise. Citons comme exemples les réseaux ferroviaires ou routiers, les moyens de transport en général, le téléphone et le système de distribution d'électricité. À l'instar des réseaux biologiques, l'échange, s'il y en a, peuvent prendre des formes variables.

13. [23, p.182]

14. Pour les références aux travaux qui concernent ces réseaux, voir : [23, pp.179-180]

15. voir : [23, p.182]

16. Pour plus d'informations, et les références des travaux portant sur les exemples cités ici voir [23, p.178-179]

2.3.3 Les réseaux du savoir

L'exemple classique de réseau du savoir est celui des citations dans les publications scientifiques¹⁷. En effet, ces publications se réfèrent, par le biais de citations, aux publications plus anciennes et leur description en réseau met en lumière comment le savoir est créé en relation à celui qui existait déjà.

Internet est typiquement un réseau de l'information avec des contenus ce réfèrent entre eux est aussi un réseau de ce type. Par contre, d'une part dans ce cas le type de référence est moins strict que celui dans le réseau de citations. De l'autre, il est vrai que l'information y est présente et que les liens entre les pages du "World Wide Web" forment un réseau par définition.

2.3.4 Les réseaux sociaux

In fine, le type de réseau auquel s'intéresse ce travail est celui des réseaux sociaux¹⁸. Le réseau qui représente cette catégorie de réseaux dans ce travail est celui d'individus vus comme des nœuds et leur relation d'amitié comme des arêtes. Il existe cependant d'autres types de réseaux sociaux qui gardant les individus comme nœuds, changent les relations mises en évidence par les arêtes, par exemple : relations de collaboration, de commerce ou relations sexuelles. Si les nœuds sont définis comme des groupes d'individus, par exemple des familles, les arêtes peuvent être les mariages entre ces familles.

Tous ces réseaux ont en commun qu'il est presque impossible de les étudier de façon exhaustive. En effet, il est difficile, voire impossible, de retracer toutes les relations qui existent dans une communauté humaine¹⁹.

En se basant sur les données existantes, il est étonnant de remarquer que ces réseaux se ressemblent au niveau de leur structure. Cette dernière sera présentée dans le prochain chapitre.

17. Pour des descriptions plus détaillées et les références aux travaux sur les exemples voir [23, pp.176-178]

18. Les références aux exemples ci-dessous seront trouvées au début du chapitre prochain, dans lequel les réseaux sociaux seront discutés plus en profondeur.

19. [23, p.175]

Synthèse

Dans cette section les quatre différents types de réseaux présentés par Newman ont été présentés. Les réseaux sociaux, auxquels ce travail prête, une attention particulière est l'un de ces types de réseaux donc il est important de connaître l'existence des trois autres. La prochaine section, comme celle-ci est conçue comme un survol rapide, mais cette fois sur des modèles qui donnent lieu à des réseaux, ou expliquent des phénomènes particuliers.

2.4 Types de modèles

Il existe un nombre important de modèles de réseau. Généralement, ils sont créés pour élucider les conditions de possibilité de phénomènes de rencontres en réalité ou créer des réseaux particuliers. Pour pouvoir créer un modèle de réseau social, il est important d'en connaître au moins les plus importants, ils seront donc rapidement présentés dans cette section.

2.4.1 Les réseaux aléatoires

Les modèles de réseaux aléatoires sont nés de la curiosité de Erdős et Rényi²⁰. Ces deux mathématiciens ont créé des modèles probabilistes. L'idée de ces modèles est de former des réseaux avec un nombre de nœuds donné et une probabilité que ces nœuds soient connectés les uns aux autres. Ces réseaux sont appelés $G(n, p)$, n étant le nombre de nœuds et p étant la probabilité de créer une arête. L'autre modèle créé par ces deux chercheurs est appelé $G(n, e)$, avec e qui est le nombre fixe d'arêtes de chaque nœud. Les deux modèles ont des propriétés assez similaires et ne sont pas craies à partir de l'observation des réseaux réels. Ils sont par contre issus de règles simples et sont donc explorables analytiquement.

2.4.2 Les petits mondes

Un des premiers modèles de réseau qui cherche à illustrer une propriété des réseaux observés est celui de Watts et Strogatz, voir [28]. Il illustre comment il

20. [16]

est possible d'avoir des petits mondes en gardant des voisins hautement connectés entre eux. Le phénomène des petits mondes est très intrigant. Il a été étudié surtout en sciences sociales, un exemple de ce phénomène est illustré par l'étude de Travers et Milgram²¹. Le résultat de leur expérience, qui est brièvement décrite dans l'introduction de ce travail, indique que les distances moyennes entre deux personnes dans le réseau des connaissances formé par toute la population des États-Unis d'Amérique sont plutôt petites, à savoir six.

Le modèle de Watts et Strogatz démontre que si un réseau très clusterisé est créé, c.-à-d. où les voisins sont très connectés entre eux est créé, et que certaines arêtes sont reconnectées de façon aléatoire, les chemins dans le réseau entre deux nœuds diminuent assez drastiquement de distance, tout en gardant un clustering acceptable²².

2.4.3 Les réseaux invariants d'échelle

Dans les réseaux invariants d'échelle, la distribution de degré des voisins d'un nœud par rapport à son propre degré est similaire pour tous les nœuds. Par exemple, les nœuds peuvent être connectés à un nœud avec un degré plus haut que le leur et 4 autres avec un degré plus bas. Cette propriété est appelée invariance d'échelle par rapport au degré des nœuds. Mathématiquement, cela signifie qu'il y a une loi de puissance qui décrit la distribution de degré des nœuds. Ce phénomène de la loi de puissance est très intéressant et il n'est pas seulement trouvé dans les réseaux, mais également dans d'autres distributions, par exemple la taille en population des villes. Dans le cas des réseaux c'est Barabási et Albert qui ont créé un modèle de réseaux qui crée cette distribution, voir [3]. Ce modèle s'appuie sur l'idée d'attachement préférentiel : un nœud qui a déjà beaucoup d'arêtes a plus de probabilité d'en avoir davantage.

2.4.4 Les réseaux spatiaux

Les réseaux spatiaux sont des réseaux basés sur la notion d'espace, dont une très bonne synthèse a été compilée par Barthélemy, voir [5]. Dans les modèles précé-

21. [26]

22. [28, p.441]

demment cités, les nœuds et les arêtes existent pour eux-mêmes sans aucune notion d'environnement. Inversement, dans les réseaux spatiaux les nœuds sont inscrits dans un espace et à partir de là, les arêtes sont créées généralement en tenant compte de l'espace dans lequel ils s'inscrivent.

Ces réseaux ont beaucoup été étudiés pour comprendre comment mettre en place des réseaux de senseurs connectés entre eux par des technologies de transmission sans fil.

Nous allons revenir sur ces réseaux dans le chapitre 4 par le biais du modèle de réseaux spatiaux aléatoires. Ce dernier servira de base pour le développement du modèle énergétique-spatial.

Synthèse

Ce chapitre a débuté par la définition de réseau utilisé dans les pages à suivre. Ensuite, les mesures importantes décrivant la structure des réseaux ont été présentées, à savoir, le nombre de nœuds et d'arêtes, le degré, sa moyenne et sa distribution, le clustering, l'assortativité, la modularité et les mesures de la distance sur un réseau, le diamètre, rayon et la distance du plus court chemin moyenne. Toutes ces mesures seront utilisées dans le reste du travail. Dans la deuxième section de ce chapitre un survol sur les types de réseaux, dont l'un est celui des réseaux sociaux a été donné. Finalement, des modèles de réseau importants ont été brièvement décrits, ils seront, comme les mesures citées plus haut utilisées dans les chapitres à venir.

3

Les données

Dans le chapitre précédent, différents types de mesures, de réseaux et de modèles de réseaux ont brièvement été décrits. Dans ce chapitre il est question de présenter plus en détail la structure des réseaux sociaux et les propriétés de l'espace dans lequel les modèles présentés plus loin s'inscrivent. Les propriétés de la structure des réseaux sociaux réels donneront donc les mesures de la structure d'un réseau créé par un modèle de réseau social doit avoir. Tandis que la discussion de l'espace nous donne des informations quant à l'environnement dans lequel un modèle spatial est inscrit.

Ce chapitre décrit donc les données essentielles pour la création d'un modèle spatial de réseau social.

3.1 La structure des réseaux sociaux

Les réseaux sociaux ont été décrits auparavant, ici, c'est leur structure qui va être présentée. Cette structure diffère des autres types de réseaux nommés avant, mais présenter ces différences dépasse le cadre de ce travail.

Un très bon point de départ pour décrire la structure de ces réseaux est le résumé de Newman "*The Structure and Function of Complex Networks*." ¹ où il s'appuie sur les recherches empiriques effectuées avant 2003. Son article présente aussi les autres types de réseaux présentés au chapitre précédent. La partie consacrée aux réseaux sociaux de son tableau récapitulatif, rassemblant des mesures structurales de réseaux

1. [23]

réels, a été reproduite dans le tableau 3.1 (à la page 20). Les nœuds des réseaux dans le tableau représentent toujours des individus, par contre, les arêtes représentent des relations de différentes natures comme : être dans un conseil d'administration ensemble *I* [10, 25], faire un travail ensemble *II-IV* [12, 18, 21, 22], *V - VII* [1, 2, 14, 24], se téléphoner ou s'envoyer des messages *VIII* étudier ensemble [6] et *IX* avoir des contacts sexuels [13, 20]. Nonobstant, la différence de définition des arêtes, la structure reste celle des réseaux sociaux.

n°	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>z</i>	<i>l</i>	α	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$	<i>as</i>
<i>I</i>	7 673	55 392	14.44	4.60	-	0.59	0.88	0.276
<i>II</i>	253 339	4964 89	3.92	7.57	-	0.15	0.34	0.120
<i>III</i>	52 909	245 300	9.27	6.19	-	0.45	0.56	0.636
<i>IV</i>	1 520 251	11 803 064	15.53	4.92	-	0.088	0.60	0.127
<i>V</i>	47 000 000	80 000 000	3.16		2.1			
<i>VI</i>	59 912	86 300	1.44	4.95	1.5/2.0		0.16	
<i>VII</i>	16 881	57 029	3.38	5.22	-	1.17	0.13	0.092
<i>VIII</i>	573	477	1.66	16.01	-	0.005	0.001	-0.029
<i>IX</i>	2 810				3.2			

TABLEAU 3.1 – Propriétés des réseaux sociaux ².

Les mesures dans le tableau sont, dans l'ordre, les suivantes : *n* nombre de nœuds, *m* nombre d'arêtes, *z* degré moyen, *l* distance moyenne entre nœuds, exposant α de la distribution de degré (- le cas échéant, si le réseau est dirigé il y a le degré entrant/sortant), $C^{(1)}$ le coefficient de clustering défini par Newman et $C^{(2)}$ le clustering moyen utilisé dans ce travail, *as* l'assortativité.

En observant ce tableau, la première chose qu'il faut noter est la différence du nombre de nœuds *n* entre les différents réseaux réels. Cette différence n'est pas, en soi, étonnante, et s'explique par le fait que les recherches présentées sont faites sur des échantillons de personnes différents. La deuxième chose à relever est le degré moyen. Celui-ci varie entre les valeurs de 1.44 et 14.44. Ces valeurs sont petites par rapport à un réseau où toutes les arêtes possibles sont créés ou cette valeur devient égale à $(n - 1)$. Cette observation permet de dire que les réseaux sociaux ont en général un degré moyen petit, par conséquent ils sont très épars ³, c'est-à-dire qu'il

2. Ce tableau reprend une partie du tableau trouvé dans l'article de Newman [23, p.182, Tableau 3.1]. Les réseaux dans la table sont :

<i>I</i>	de directeurs d'entreprises [10, 25]	<i>VI</i>	de messages e-mail [14]
<i>II</i>	de mathématiciens coauteurs [12, 18]	<i>VII</i>	de carnets d'adresses mail [24]
<i>III</i>	de coauteurs physiciens [21, 22]	<i>VIII</i>	de relations entre étudiants [6]
<i>IV</i>	de coauteurs biologistes [21, 22]	<i>IX</i>	de contacts sexuels [13, 20]
<i>V</i>	d'appels téléphoniques [1, 2]		

3. [29, p.10]

y a très peu d'arêtes par rapport à leur nombre maximal potentiel. Une fois noté le degré moyen, il reste à déterminer comment les degrés sont distribués. Cette distribution n'est pas visible dans ce tableau. Par contre, elle a en général une queue positivement asymétrique⁴. Ce qui veut dire qu'il y a une très petite partie de nœuds qui ont un degré exceptionnellement haut. La loi de puissance par exemple a une distribution de ce genre.

La prochaine valeur intéressante est celle du clustering $C^{(2)}$. Cette valeur peut varier entre 0 (qui équivaut à pas d'amitiés communes), et 1 (quand tout le monde est ami de tous les autres). Les valeurs dans le tableau varient entre 0.1 et 0.9, à l'exception du réseau *VIII*. Cette exception s'explique, entre autres, par le degré moyen du réseau qui est très bas. En effet, s'il y a moins de deux arêtes par nœud, il est difficile d'avoir des triangles dans le réseau.

Après le clustering il faut se pencher sur la valeur de l'assortativité as . Tous les réseaux présentés à l'exception de *VIII* ont une assortativité positive. Ce qui veut dire que dans ces réseaux les nœuds sont de préférence connectés à d'autres nœuds de même degré. Les autres types de réseaux : biologiques, de l'information et technologiques, sont tous dissortatifs, c'est-à-dire ils ont une assortativité négative⁵.

La prochaine mesure importante est celle de la distance. Dans le tableau elle est résumée par la distance moyenne l , malheureusement nous n'avons ni le diamètre ni le rayon de ces réseaux. La distance moyenne dans ces réseaux est toujours assez courte à l'exception de celle du réseau *VIII*. Courte, dans ce contexte, veut dire qu'en passant par peu de nœuds le réseau peut être traversé d'un nœud à un autre. Ce qui est équivalent à dire que ces réseaux sont des petits mondes. La recherche menée par Milgram et Travers⁶ démontre que les réseaux sociaux intègrent ce phénomène. La mesure qui manque dans ce tableau 3.1, est celle de la modularité et du nombre de communautés présentes dans ces réseaux. Le facteur le plus important, surtout intuitivement, est que dans un réseau social, il doit y avoir des communautés. La modularité est le rapport entre liens internes à une communauté et ses liens externes. Il est nécessaire, pour parler de communautés bien formées, que la modu-

4. [29, p.10]

5. [23, p.182]

6. [26]

larité calculée soit la plus haute possible.

Résumé

Dans cette section on va essayer de rassembler les informations importantes sur les réseaux sociaux. Le tableau 3.2 à la page 22 présente les principales mesures avec des intervalles ou des mesures approximatives, qui peuvent définir la structure des réseaux sociaux. Les valeurs dans ce tableau ont été remportées de celui présenté plus haut. Sauf certaines de ces valeurs, qui ne sont pas fixes en soi ont été choisies en pensant aux modèles qui vont être présentés plus tard dans ce travail.

Mesure	Symbole	Valeurs	Commentaire
Nombre de nœuds	n	> 1000	Ici plus grand que 1000 sert plutôt pour les modèles qui vont être présentés.
Nombre d'arêtes	m	$z * 2n$	Cette valeur dépend du degré moyen qui est plus facile a travailler dans des modèles.
Degré moyen	z		Le réseau doit être éparse, donc le degré moyen doit être assez bas.
Distribution de degrés			Doit avoir une queue positivement asymétrique ⁷ .
Clustering	C	$\gg 0$	Un réseaux social doit avoir au moins un clustering de 0.1 ⁸ .
Assortativité	as	> 0	Cette valeur doit être positive ⁹ .
Distance	l	$\rightarrow \log(n)$	Cette mesure est celles que donnent les réseaux relationnels ¹⁰ , en inscrivant le réseau dans un espace elle est beaucoup plus difficile à atteindre.
Modularité	M	$\gg 0.5$	Cette valeur indique la présence de communautés bien définies.

TABLEAU 3.2 – Résumé des propriétés des réseaux sociaux.

Mesures et leurs propriétés pour définir un réseau social.

Une dernière propriété de réseaux sociaux est importante à souligner. Les nœuds de ces réseaux sont des acteurs sociaux. Donc en général des individus. Un modèle qui veut rendre compte d'un réseau social en doit tenir compte dans la définition de son modèle. En effet, un modèle où les nœuds ne sont pas eux-mêmes des modèles d'individu, fait selon moi très peu de sens, parce qu'il ne rend pas compte du fait que dans un réseau social ce sont les individus qui créent un lien.

3.2 La structure de l'espace

L'espace qui va être utilisé pour les modèles qui vont être présentés est une surface de tore de dimension 1x1. L'avantage d'utiliser un tore, plutôt que la surface d'un carré, est que sur un tore il n'y a pas d'effets de bord. S'il y avait ces effets dans le modèle une variable devrait s'ajouter celle de la distance d'un nœud au bord de l'espace. Vu que l'introduction d'une variable supplémentaire complique la discussion des résultats, la surface d'un tore est la meilleure solution.

3.2.1 La distribution des nœuds

Modéliser un réseau spatial sans connaître l'espace dans lequel les nœuds sont distribués, limite beaucoup les interprétations de certains résultats obtenus. Vu que le premier pas des modèles à suivre est toujours le même et que l'espace prend du sens à partir de son occupation par des individus. Il faut donc à priori les distribuer dans l'espace. Nous le ferons comme dans les modèles qui seront présentés dans les chapitres à venir. Pour ce faire le nombre de nœuds (n) voulu dans le modèle, est choisi. Une fois la quantité de nœud spécifiée, les n nœuds sont distribués uniformément dans l'espace. Ainsi, tout point dans l'espace a la même probabilité qu'un nœud l'occupe.

Une propriété importante de cette distribution est que la densité moyenne, notée est aussi uniforme dans tout l'espace. Cette densité est définie, si A est l'aire de la surface :

$$\bar{\rho} = \frac{n}{A}$$

Vu que A est égal à un cette densité est égale à n .

Pour une partie de cet espace de aire A' , le nombre espéré de point qui y est contenu se calcule $n_{A'} = \bar{\rho} * A'$. Ces quantités et propriétés seront importantes dans un deuxième temps, comme aussi les distances entre les nœuds.

3.2.2 Les distances physiques

Les distances physiques entre les nœuds dépendent de l'espace utilisé et de la façon dont les points y sont distribués. L'espace étant un tore sans bords la distance

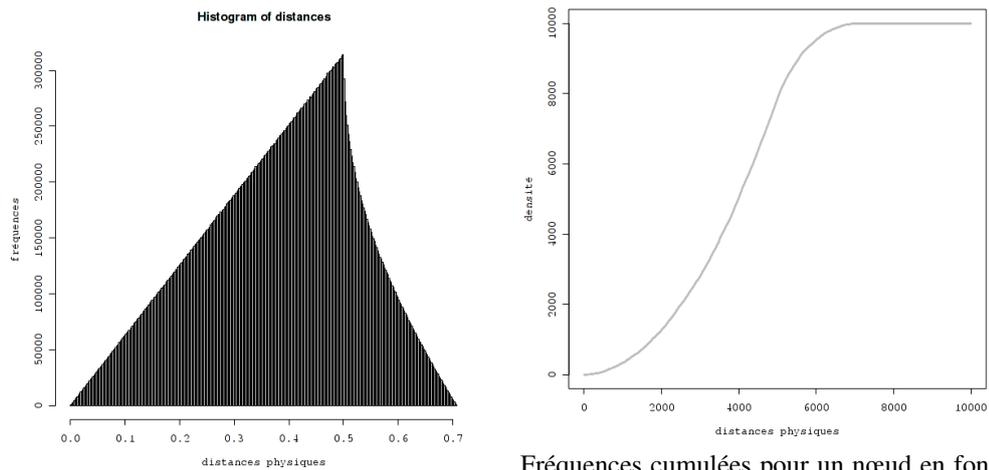
n'est influencée que par les positions relatives des nœuds et pas par leur coordonnées dans l'espace.

La distance choisie pour les modèles est celle euclidienne sur un tore de dimensions 1x1. Elle est définie par la formule suivante :

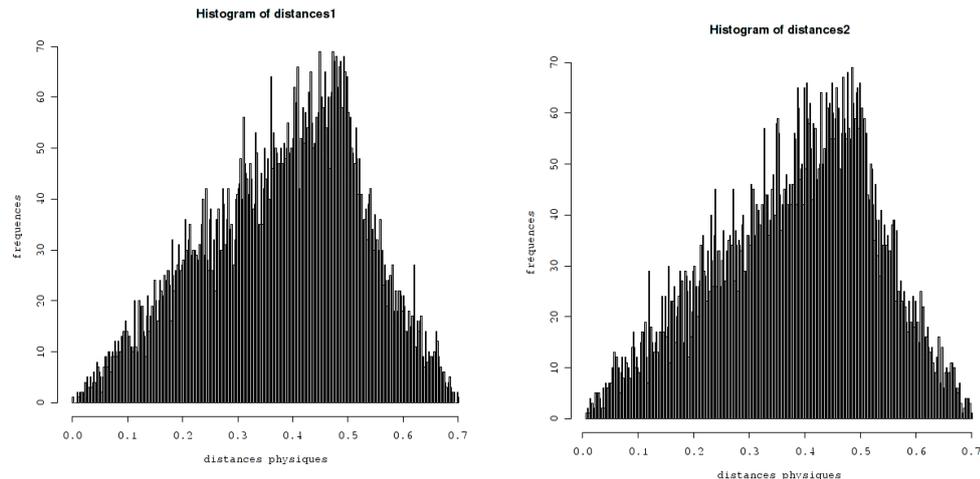
$$d(w, v) = \sqrt{\min(x_w - x_v, 1 - x_w - x_v)^2 + \min(y_w - y_v, 1 - y_w - y_v)^2}$$

Il est intéressant à ce point de regarder comment les distances sont distribuées, parce que dans le présent travail tous les modèles utilisent la distance d'une façon ou d'une autre. Les distances entre les points distribués dans l'espace sont illustrées dans les figures suivantes :

FIGURE 3.1 – Distributions des distances



Fréquences cumulées pour un nœud en fonction de la distance.



Distribution des distances de toutes les arêtes possibles partir d'un nœud choisi au hasard. Les graphiques ont été calculés à partir de 10000 points distribués uniformément sur un tore.

Une vue d'ensemble des graphiques permet de dégager plusieurs observations. Premièrement, la distribution des fréquences des distances est croissante jusqu'à une distance de 0.5. Puis elle diminue rapidement. Cet état de fait s'explique que la hauteur d'une fréquence peut être obtenue en calculant la différence d'aire inscrite dans le carré de deux cercles centrés au milieu du carré l'un ayant comme rayon la valeur minimale de la distance décrite par la barre l'autre la maximale, multiplié par la densité des nœuds. Jusqu'à 0.5 le rayon égal à la distance maximale est toujours inscrit dans tout le carré après cette valeur la différence de l'aire qui reste inscrite dans le carré diminue, vu que les deux cercles dépassent le carré. Deuxièmement, les distributions des distances à partir d'un seul point sont fortement irrégulières, même si en elle suit globalement la distribution totale. Ceci est dû à la distribution uniforme des points. Par contre, la distribution cumulée des distances à partir d'un point est stable pour tous les nœuds. Ce dernier résultat rend certaines des mesures analysables pour certains modèles, mais ce point sera discuté plus tard.

3.2.3 L'idée d'espace

L'espace est traité dans ce chapitre comme un espace physique. Cette analogie fait du sens parce que l'espace physique est connu de tous. Mais cette analogie peut facilement être remplacée. Parce que l'espace dans lequel est inscrit un modèle est un modèle d'espace lui-même et n'existe que comme abstraction mathématique.

Dès lors, il peut être l'analogie mathématique de par exemple un espace d'idées, d'un espace culturel ou de tout autre espace imaginable. Par contre, il est important de redéfinir les distances dans cet espace et le positionnement des acteurs qui y sont inscrits, si l'espace en soi est redéfini. Dans ce qui suit en général on a essayé de rester fidèle à l'idée d'un espace défini physiquement.

Synthèse

Dans ce chapitre les valeurs des mesures qui définissent la structure d'un réseau social ont été dégagées à partir d'un tableau résumant les propriétés des réseaux réels. Ces valeurs seront le standard de comparaison des réseaux créés à partir d'un modèle aux réseaux sociaux. Dans la deuxième partie du chapitre, la distribution des nœuds dans l'espace a été discutée. Celle-ci est à la base de tous les modèles qui sont présentés dans la suite du travail. In fine, il a été noté que cet espace est un modèle lui aussi et peut donc représenter n'importe quel espace dans lequel des acteurs sociaux peuvent être inscrits. Cette observation sera très importante par la suite.

4

Les modèles spatiaux aléatoires

Les réseaux spatiaux aléatoires sont des modèles de réseau basés sur l'espace. Il est donc important de les présenter dans ce travail parce qu'ils montrent une option de l'utilisation de règles qui utilisent l'espace pour créer des réseaux.

La base du modèle est très simple, les nœuds sont uniformément distribués dans un espace et se connectent selon une règle précise¹. L'espace utilisé ici est celui d'un tore, comme expliqué au chapitre précédent.

La règle la plus classique utilisée avec les modèles spatiaux aléatoires et de spécifier un rayon qui limite la distance de connexion des nœuds. Tous les nœuds qui sont plus proches que ce rayon sont ceux auxquels le nœud considéré se connecte. L'algorithme de création des liens est décrit par le pseudocode suivant :

Algorithm 1 Création des arêtes avec un réseau spatial aléatoire

```
for all  $i \in nodes$  do  
  for all  $j \in nodes$  do  
    if  $i \neq j \wedge (distance(i, j) \leq visionOf(i))$  then  
      addLink( $i, j$ )  
    end if  
  end for  
end for
```

Vu de cette manière, ces réseaux sont très loin des réseaux sociaux, en effet, en prenant en cause les relations sociales, dans celles-ci il n'est généralement pas le cas que tous les voisins se connaissent. Quoique, dans des époques sans les possibilités de mobilité et la densité de population d'aujourd'hui cela aurait pu être le cas. La question se pose tout de même : pourquoi utiliser des modèles si simples et si loin

1. [5]

de la réalité comme base pour un modèle de réseau social ?

La réponse est en deux points. Premièrement, ces modèles sont simples et donc mathématiquement analysables, ce qui pour un modèle est un avantage certain. Deuxièmement, s'il y a une chose certaine c'est que tout être vivant est en relation avec l'environnement et l'espace est à la base même d'une définition d'environnement. D'ailleurs, en mathématique une dimension de l'espace peut représenter des variables autres que l'espace physique à proprement parler, par exemple un "espace culturel". Cet argument sera utilisé plus tard. Pour le moment, l'objet d'intérêt est constitué par les réseaux spatiaux aléatoires.

4.1 Le modèle à rayon fixe

Le premier modèle analysé dans ce chapitre est celui à rayon fixe déjà spécifié plus haut. Vu que le champ d'intérêt est celui des réseaux sociaux, dont le degré moyen des nœuds est assez bas, le rayon fixé doit être relativement court. Cette limitation permet de considérer les résultats de Dall et Christensen² pour comprendre le clustering dans ce modèle. En outre, il sera également pertinent de montrer le résultat de Antonioni sur l'assortativité.

4.1.1 La distribution de degré et le degré moyen

Avant tous les autres mesures il nécessaire de montrer comment trouver le degré moyen dans ces modèles. En effet, il dépend juste des trois paramètres qui donnent le modèle et donc peut être utilisé comme paramètre lui-même. Les deux paramètres classiques sont le rayon r , le nombre de nœuds n , le troisième est implicite et c'est l'espace dans lequel ces nœuds sont distribués. Dans ce cas, l'espace est un tore de dimension 1×1 et c'est l'espace qui sera utilisé pour tous les modèles présentés à partir de là. Le degré moyen se calcule de la façon suivante :

Soit : $A = 1$ l'aire de l'espace et $p = \frac{\pi r^2}{A}$ la densité des degrés dans l'espace A , alors la distribution de degré est :

$$P(d_x = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}$$

2. [11]

$$\xrightarrow[r \rightarrow 0]{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

avec : $\lambda = \pi nr^2$ qui est aussi le degré moyen $\bar{d} = \pi nr^2$. Donc il est possible de calculer le rayon voulu à partir du degré moyen.

$$r = \sqrt{\frac{z}{\pi n}}$$

Par contre, il ne doit pas être trop grand, sinon l'approximation ne fonctionne plus. Cette façon de calculer le rayon en fonction du degré moyen est particulièrement pratique pour modéliser, car le degré moyen est une valeur cruciale pour comparer des modèles.

4.1.2 La valeur du clustering

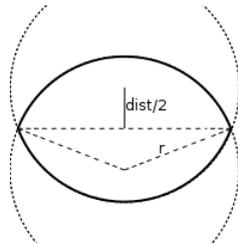


FIGURE 4.1 – Les nœuds présents dans l'espace démarqué forment une relation triangulaire avec les deux nœuds au centre des deux cercles.

La valeur du clustering pour des réseaux spatiaux aléatoires épars a été calculée analytiquement par Dall et Christensen. L'idée qu'ils ont eu est de calculer combien de nœuds sont présents le triangle contenu dans la superposition de deux cercles de rayon r plus grand que la distance entre les centres de ces cercles, puis intégrer pour tous les triangles. Les nœuds étant distribués uniformément la valeur de l'intégrale est calculable analytiquement. Pour R^2 le résultat approximatif est ³ :

$$C_2 = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.5865$$

4.1.3 L'assortativité

En suivant la méthode de Dall et Christensen, Antonioni ⁴ a étendu leur résultat à l'assortativité. Celle-ci est égale à la valeur du clustering. Il en est ainsi à cause

3. [11, p.12]

4. résultat qui n'est pas encore publié.

de la construction du modèle, en effet le triangle fermé illustré dans la figure 4.1, contient les nœuds qui augmentent en même temps les nœuds au centre des cercles illustrés. Ces nœuds prennent donc influence sur l'assortativité.

Ces deux mesures sont calculés analytiquement donc il ne faut même pas calculer numériquement le modèle pour les avoir. Par contre, pas toutes les mesures ne peuvent être calculées ainsi, une instance du modèle est présentée, et les autres mesures qui en découlent seront discutées.

4.1.4 Exemple

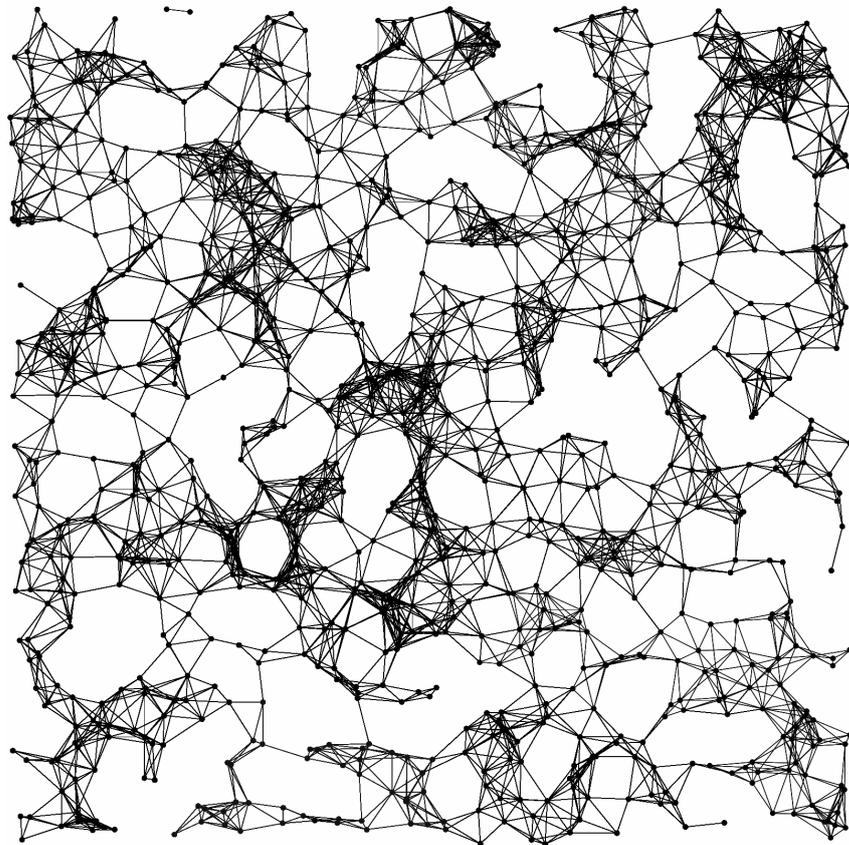


FIGURE 4.2 – Réseau spatial aléatoire sur un plan de dimension 1x1 avec 1000 nœuds et un rayon de 0.056⁵.

L'image 4.2 à la page 30 est celle d'un réseau spatial avec $n = 1000$ nœuds, et un rayon fixe de $r = 0.056$. À partir de cette image, il est possible de se faire une idée

5. Les images de réseaux seront des modèles créés sur un carré, même si l'analyse est toujours de modèles qui sont sur un tore. Ce choix est dû au fait que les réseaux sur un carré sont visuellement plus compréhensibles.

de la valeur de certaines mesures de ce réseau, mais il est préférable les calculer, par conséquent, les mesures d'un réseau modélisé se trouvent résumés ici :

Mesure	Valeurs	Commentaire
Nombre de nœuds	10000	Cette valeur a été fixée comme paramètre du modèle, étant assez haute elle garantie une certaine précision dans les autres mesures.
Nombre d'arêtes	400208	
Degré moyen	80.042	Le paramètre choisi pour ce modèle était $z = 80$, à cause de la distribution des points le degré réel est légèrement plus petit.
Distribution de degrés	Poisson	5.4 (à la page 45)
Clustering	0.586	Le clustering mesuré dans le modèle donne la mesure préconisée par Dall et Christensen.
Assortativité	0.591	L'assortativité est un peu plus basse que le clustering, mais elle est toujours dans l'intervalle attendu.
Diamètre	16	Les distances sur le réseau sont grandes à cause des distances physiques courtes.
Rayon	15	
Distance moyenne	8.563	
Modularité	0.797	La modularité est déjà avec ce modèle bien haute.
Communautés détectées	17	

TABLEAU 4.1 – Réseau spatial aléatoire.

Mesures pour un réseau spatial aléatoire sur un tore 1×1 , avec $n = 10000$ et $r = 0.05$.

Le tableau 4.1 démontre que les résultats présentés plus haut sont pertinents. Aussi, des mesures comme celles liées aux distances entre les nœuds et la modularité sont maintenant visibles. Étant donné que le modèle est déterministe dans la création des liens, une seule modélisation suffit pour établir des résultats pertinents pour voir comment se comporte le modèle (en tout cas si le réseau recherché doit avoir un certain degré). Il est clair que si le degré moyen est modifié ces valeurs le sont aussi.

Les mesures qui décrivent la structure du réseau difficilement calculable à priori sont discutées dans ce qui suit.

4.1.5 La modularité

La modularité doit être haute pour que les communautés détectées par l'algorithme de Louvain⁶ puissent être considérées pertinentes. C'est le cas ici, il est

6. [7]

donc possible que la spatialité du modèle crée des communautés mêmes en utilisant une règle simple comme celle du rayon fixe. En pensant à la réalité sociale et les communautés qui y sont détectées, cette hypothèse ne semble pas si éloignée de la réalité.

4.1.6 La distance

Dans ces modèles, la distance sur le réseau entre les nœuds est assez grande. Cela est dû au fait que les nœuds se connectent uniquement à des nœuds spatialement proches et par conséquent également sur le réseau.

4.1.7 Comparaison avec les réseaux sociaux.

En comparant le modèle classique de réseau aléatoire spatial avec les réseaux sociaux, il faut conclure que ce modèle ne modélise pas des réseaux sociaux. Ce, pour multiples raisons. Premièrement, les points sont trop distants entre eux, le monde créé par ce réseau est grand, du fait que les distances sont grandes. Deuxièmement, le coefficient du clustering est trop important. Ce qui veut dire que les groupes d'amis sont trop grands, et les connexions personnelles en dehors du cercle d'amis, ne sont pas assez présentes. In fine, la distribution de degré est une distribution de Poisson, et n'as donc pas une asymétrie positive.

Pour aborder ces problèmes dans la prochaine section, un modèle basé sur la même idée, mais légèrement différent sera présenté.

4.2 Petit changement : un rayon normalement distribué

Le but de cette partie est de voir comment le modèle change si au lieu d'avoir un rayon fixe le rayon est défini séparément pour tous les nœuds en suivant une distribution normale. Les questions à se poser en particulier sont : est-ce que la distance entre les nœuds diminue ? Que se passe-t-il avec le clustering et l'assortativité ? La distribution de degré change-t-elle ou pas ?

4.2.1 Exemple

Pour illustrer ce modèle de réseau, comme avant une image du réseau créée est présentée (figure 4.3) et un tableau (tableau 4.2) contenant les valeurs qui décrivent la structure de ce réseau :

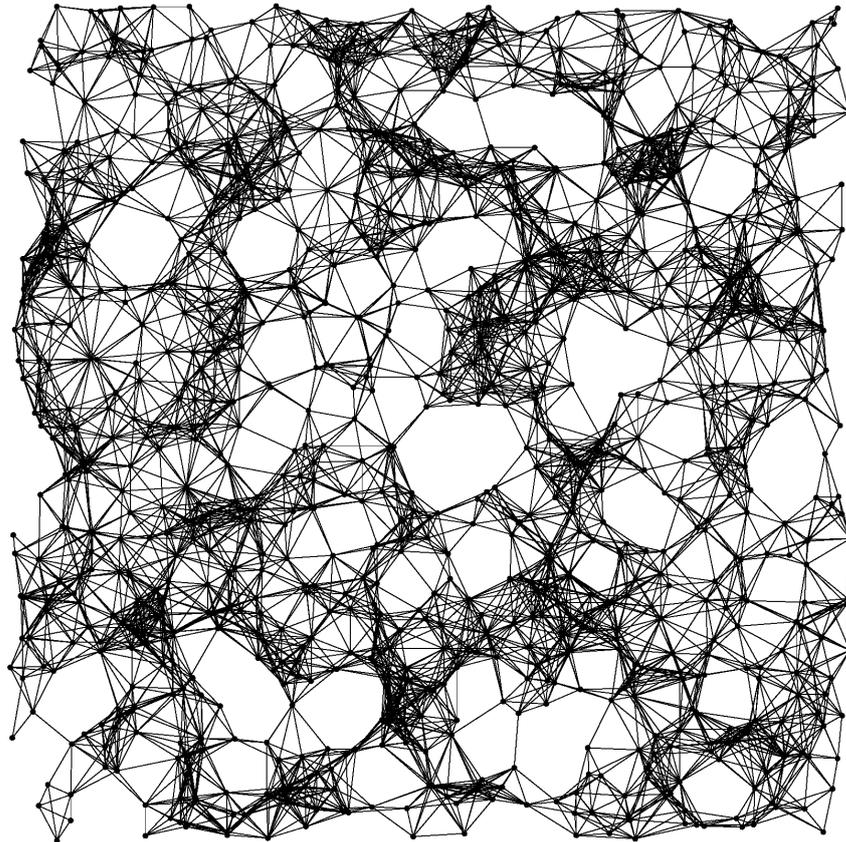


FIGURE 4.3 – Réseau spatial aléatoire sur un plan de dimension 1x1 avec 1000 nœuds et un rayon normalement distribué avec moyenne de 0.062 et une variance de 0.01.

Mesure	Valeurs	Commentaire
Nombre de nœuds	10000	Cette valeur a été fixée comme paramètre du modèle, étant assez haute elle garantit une certaine précision dans les autres mesures.
Nombre d'arêtes	424718	
Degré moyen	84.944	Le paramètre choisi pour ce modèle était $z = 80$, à cause de la distribution normale du rayon le degré réel est augmenté par rapport à la valeur attendue en utilisant l'approximation utilisé avec le modèle classique.
Distribution de degrés		5.4 (à la page 45)
Clustering	0.59	Le clustering mesuré dans le modèle donne la mesure préconisée par Dall et Christensen, même si le rayon est normalement distribué.
Assortativité	0.091	L'assortativité par rapport au modèle précédent est diminuée de façon très forte.
Diamètre	14	Une petite baisse parce que certains nœuds ont des rayons plus grands.
Rayon	12	
Distance moyenne	7.365	
Modularité	0.792	Ici aussi les communautés sont bien définies.
Communautés détectées	16	

TABLEAU 4.2 – Réseau spatial aléatoire avec un rayon normalement distribué.

Mesures pour un réseau spatial aléatoire sur un tore 1×1 , avec $n = 10000$ et le rayon normalement distribué avec moyenne 0.047 et variance de 0.008.

4.2.2 Ressemblances et différences avec le modèle classique

La chose peut-être la plus étonnante est que le clustering ne change pas entre les deux modèles tandis que l'assortativité décroît de façon notable. L'explication de ce phénomène est pourtant assez simple : le clustering dépend intrinsèquement de l'espace, donc même si certains points se connectent à une distance plus ou moins grande ils sont quand même tous connectés aux points proches, tandis que l'assortativité dépend des degrés des nœuds. Par conséquent, un nœud dans la partie droite de la distribution normale du rayon a un degré beaucoup plus haut qu'un nœud qui a un rayon dans la partie gauche de la distribution. Ce qui fait que l'assortativité entre deux nœuds connectés est ainsi très basse.

La deuxième chose à noter c'est la diminution des distances. Ceci est en fait un résultat prévisible, compte tenu du fait que permettre des rayons plus grands a comme conséquence d'avoir des arêtes un peu plus longs, ce qui diminue la distance entre les nœuds. Nonobstant, la distance dans ce réseau reste grande, et l'amélioration

n'est pas très soutenue.

Troisièmement, la distribution de degré change, mais ce changement va être discuté plus tard dans le travail. D'abord nous allons regarder si ce modèle est plus similaire à un réseau social que le précédent.

4.2.3 Rayon normalement distribué et réseaux sociaux

D'une part, avec ce second modèle il y a des améliorations par rapport à la structure de réseau social recherché. En effet, l'assortativité est moins grande, mais toujours positive. La distance a été diminuée, même si elle est toujours trop grande. Par contre, le résultat le meilleur est que la distribution de degré est beaucoup plus proche de celle recherchée.

D'autre part, il reste des choses qui ne fonctionnent pas, notamment la distance, comme vu précédemment.

Synthèse

Dans ce chapitre le modèle classique de réseau aléatoire spatial a été présenté. Il a aussi été modifié en changeant la distribution du rayon. En ayant exploré ces modèles il est facile de se rendre compte que le problème principal est la limitation stricte de l'espace de connexion du au rayon comme variable discriminante. La spatialité du modèle est le but recherché dans ce travail, il est donc important de la conserver. C'est pourquoi dans le prochain chapitre une autre variable similaire au rayon, mais différente en son essence, sera présentée : l'énergie.

5

L'énergie

Dans ce chapitre une nouvelle façon de limiter la distance de connexion des nœuds est présentée. En effet, ils ne sont plus limités par un rayon, mais seulement par une énergie qui leur est attribuée. Pour créer un lien cette énergie est utilisée pour payer le coût de la distance.

L'utilisation de l'énergie est une façon naturelle de limiter une distance parcourue, étant donné le fait qu'il s'agit de modéliser des êtres vivants qui veulent défier l'espace. En effet, être limité que par un rayon fixe ne peut que représenter un modèle très cru. Mais comment définir cette énergie par rapport à l'espace ? La solution proposée ici est que les individus auront besoin de l'énergie pour dépasser une certaine distance. Aussi, puisqu'il s'agit toujours d'un réseau d'amis cette distance doit être dépassée par les deux individus dans la relation. Pour simplifier le modèle chaque nœud met 50% de cette énergie dans l'arête. Si l'un des deux nœuds n'a pas assez d'énergie, le dépassement de la distance pour créer la relation ne sera pas possible et donc l'arête ne sera pas créée.

Les autres paramètres des modèles restent inchangés, à savoir les nœuds seront toujours distribués de façon uniformément aléatoire sur un tore de dimensions 1x1. Ceci est la base de l'utilisation de l'énergie utilisée dans les prochains modèles présentés. Le premier de ces modèles est simple et inspiré des réseaux spatiaux aléatoires à rayon fixe.

5.1 Modèle avec énergie fixe

Dans ce modèle l'énergie sera fixe pour tous les nœuds, même si parler d'énergie fixe paraît absurde. Les nœuds se connectent toujours au nœud plus proche. Pour que le modèle puisse être complètement déterministe, l'algorithme qui génère ce modèle cherche à chaque fois l'arête potentielle la plus courte. Si les deux nœuds ont l'énergie nécessaire, elle est créée. Cette énergie nécessaire sera ensuite soustraite aux nœuds concernés.

Algorithm 2 Création des arêtes avec un réseau spatial aléatoire avec l'énergie

```
for all  $i \in Nodes$  do
  for all  $j \in Nodes$  do
    if  $i \neq j$  then
      DistMap.add(distance( $i, j$ ), ( $i, j$ ))
    end if
  end for
end for
while  $flag \neq nodes$  do
  for  $min(distance \in DistanceMap.distances)$  do
     $i = DistanceMap.get(distance).get(i)$ 
     $j = DistanceMap.get(distance).get(j)$ 
    if  $availableEnergy(i) \leq distance * 50\%$  then
      flag.add( $i$ )
    end if
    if  $availableEnergy(j) \leq distance * 50\%$  then
      flag.add( $j$ )
    end if
    if  $i \notin flag \wedge j \notin flag$  then
      if  $distance(i, j) \leq visionDe(i) \vee distance(i, j) \leq visionDe(j)$  then
        addLink( $i, j$ )
      end if
    end if
  end for
end while
```

L'algorithme de création du modèle continue jusqu'à qu'il ne soit plus possible de créer des nouvelles arêtes, donc les nœuds, en général, n'utilisent pas toute l'énergie à leur disposition. Il en est ainsi, car les nœuds n'ont plus assez d'énergie en commun pour "payer" le cout de la distance qu'un lien exige.

Par contre, la limitation est moins stricte que celle d'un rayon fixe. Si deux nœuds sont entourés par beaucoup de nœuds très proches et sont à une distance plus grande qui leur permet de se connecter, cela reste possible. Cette possibilité est donnée si les deux nœuds ont encore assez d'énergie pour payer le cout lié à la distance. La section suivante donne un exemple d'un réseau créé par le modèle.

5.1.1 Exemple

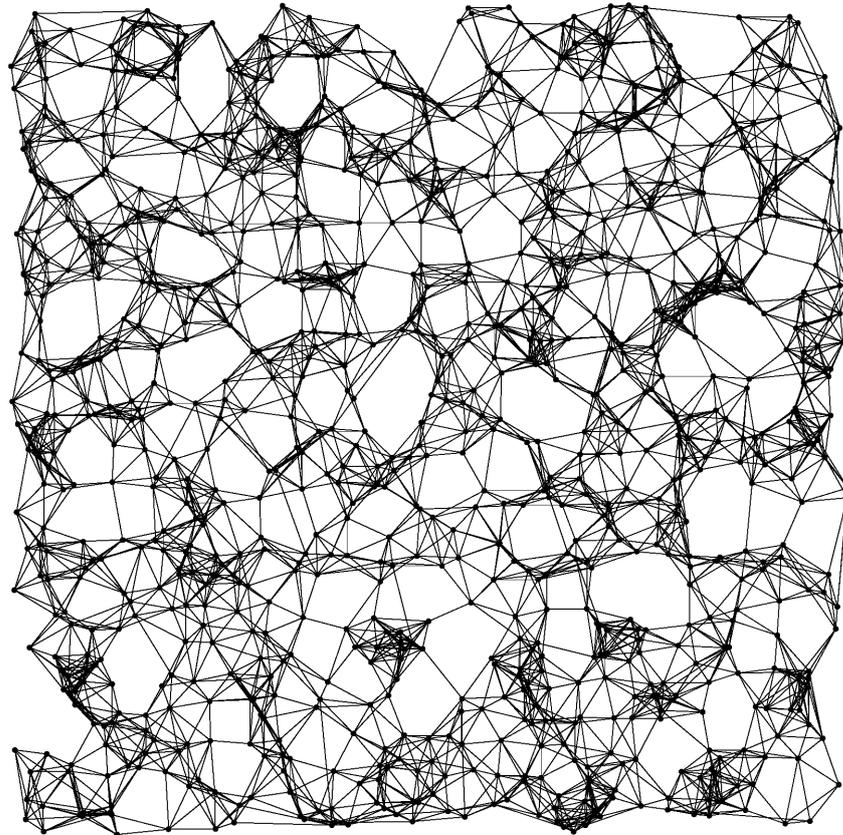


FIGURE 5.1 – Réseau spatial aléatoire sur un plan de dimension 1x1 avec 1000 nœuds et une énergie de 0.22.

À partir de la figure 5.1 il est difficile de voir s'il y a un changement par rapport à un réseau spatial aléatoire qui comme limitation utilise un rayon. En effet, cette figure ressemble beaucoup à la figure 4.2 à la page 30, et les différences ne seront pas visibles sans analyser les mesures de la structure que ce modèle produit. Ces mesures sont comme toujours montrées par un tableau dans ce cas le 5.1 à la page 38.

Même en regardant ce tableau peu de choses changent par rapport au tableau descriptif d'un réseau spatial aléatoire classique (voir tableau 4.1 à la page 31). En effet, le seul changement majeur est que la différence entre le rayon du réseau et le diamètre est plus grande. De ce fait, la chose à déduire est que l'utilisation de l'énergie permet des liens plus distants que le modèle utilisant un rayon fixe.

Mesure	Valeurs	Commentaire
Nombre de nœuds	10000	Cette valeur a été fixée comme paramètre du modèle, étant assez haute elle garantit une certaine précision dans les autres mesures.
Nombre d'arêtes	406302	
Degré moyen	81.26	
Distribution de degrés		se référer à la figure 5.4 (à la page 45)
Clustering	0.578	Le clustering mesuré dans le modèle donne une mesure très proche de celle des modèles avec le rayon
Assortativité	0.543	L'assortativité comme le clustering sont très proches de celle calculée pour le modèle avec le rayon fixe, ce qui confirme que l'utilisation de l'énergie à la place du rayon, en tout cas pour ces deux mesures, ne change pas grand-chose.
Diamètre	14	Les distances sont trop grandes pour avoir un phénomène de petit monde, mais ce modèle est spatial et pas relationnel.
Rayon	10	
Distance moyenne	7.341	
Modularité	0.784	Dans ce modèle aussi la modularité reste assez haute.
Communautés détectées	16	

TABLEAU 5.1 – Réseau spatial aléatoire en utilisant l'énergie.

Mesures pour un réseau spatial aléatoire sur un tore 1×1 , avec $n = 10000$ et énergie par nœud de 1.4.

En ayant vu que le changement n'est pas très prononcé, mais que le seul changement important est dans la direction souhaitée, de diminuer un peu la distance entre les nœuds peut-être effectués en expérimentant avec une distribution normale avec l'énergie.

5.2 L'énergie normalement distribuée

L'énergie normalement distribuée a plus de sens qu'un rayon normalement distribué. En effet, lorsqu'il s'agit d'individus, pas tout le monde n'a pas la même énergie, voir le temps à disposition. Il ne faut cependant pas oublier qu'en nommant une variable une certaine attente par rapport au fonctionnement de celle-ci devient inévitable. D'une part, ce nom crée une analogie, et comme toutes les analogies il faut savoir jusqu'à quel point elle s'applique. D'autre part, un modèle mathématique est une analogie en soi.

Cette énergie est néanmoins une variable qu'il faut explorer. En page 40 on trouve une illustration du modèle qui montre ce qui se passe lorsque l'énergie est distribuée normalement pour créer un modèle de réseau aléatoire spatial.

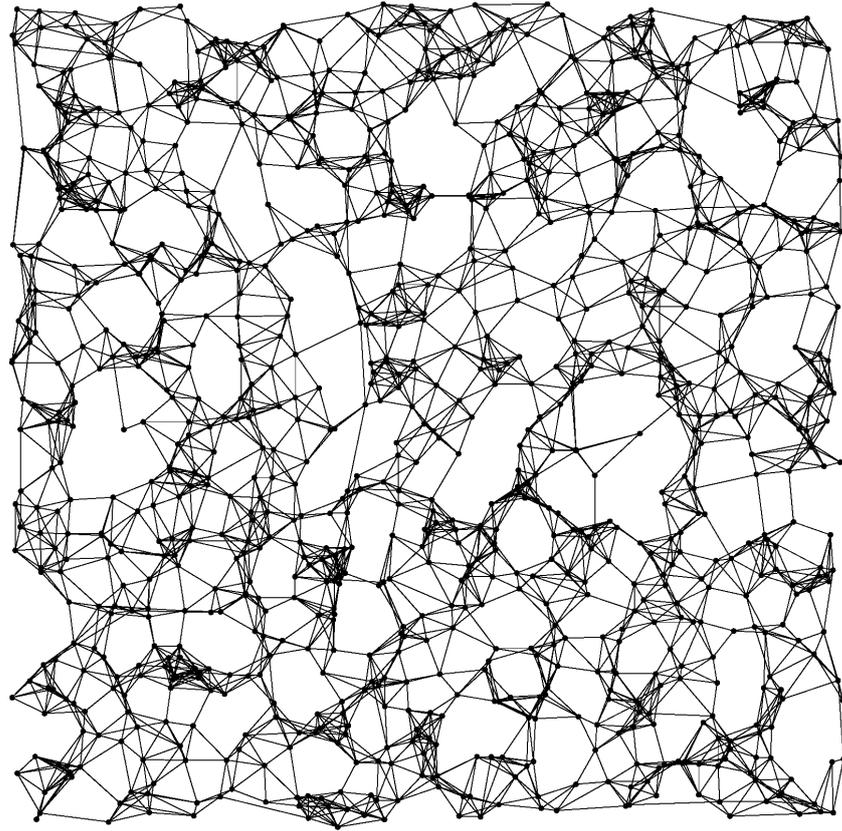


FIGURE 5.2 – Réseau spatial aléatoire sur un plan de dimension 1x1 avec 1000 nœuds et une énergie normalement distribuée avec moyenne de 0.16 et variance de 0.027.

Mesure	Valeurs	Commentaire
Nombre de nœuds	10000	Cette valeur a été fixée comme paramètre du modèle. Étant assez élevée elle garantit une certaine précision dans les autres mesures.
Nombre d'arêtes	373996	
Degré moyen	74.799	
Distribution de degrés	-	Se référer à la figure 5.4 (à la page 45)
Clustering	0.579	Le clustering mesuré dans le modèle donne la mesure préconisée par Dall et Christensen, même si le rayon est normalement distribué.
Assortativité	0.132	L'assortativité par rapport au modèle précédent est plus faible, le phénomène découvert en distribuant normalement le rayon, s'applique aussi dans le cadre de figure de l'utilisation de l'énergie.
Diamètre	12	Dans ce modèle aussi la modularité haute indique des communautés bien définies.
Rayon	9	
Distance moyenne	6.560	
Modularité	0.791	
Communautés détectées	14	

TABLEAU 5.2 – Réseau spatial aléatoire en utilisant l'énergie normalement distribuée.

Mesures pour un réseau spatial aléatoire sur un tore 1×1 , avec $n = 10000$ et énergie normalement distribuée avec moyenne de 1.25 et variance de 0.208.

Que les effets observés sont ceux qui ont été identifiés avec changement d'un rayon fixe à rayon normalement distribué n'est pas étonnant. En effet, les mesures qui changent comme auparavant ce sont l'assortativité et partie de la distance entre les nœuds.

Il est temps de comprendre comment s'opèrent ces changements, et de comparer les quatre modèles en détail. Ce sera l'objet de la prochaine section.

5.3 Comparaison des modèles

Les quatre modèles sont très proches, à l'exception de la possibilité d'avoir des liens un peu plus distants en utilisant l'énergie. Il est donc important de voir comment se comporte cette distance des liens. Étant donné que tous les modèles sont spatiaux, il s'entend qu'il existe une relation entre la distance physique des liens entre les nœuds et celle qui se mesure sur le réseau. En effet, vu que les arêtes sont inscrites dans l'espace, les liens qui sont physiquement les plus longs sont également les liens distants dans le réseau.

Aussi il est important de comparer la distribution de degré qu'ont ces modèles.

L'assortativité qui change entre les modèles fixes et ceux avec des distributions normales indique que cette distribution change, ou du moins que les nœuds sont moins connectés avec des nœuds qui ont un degré similaire.

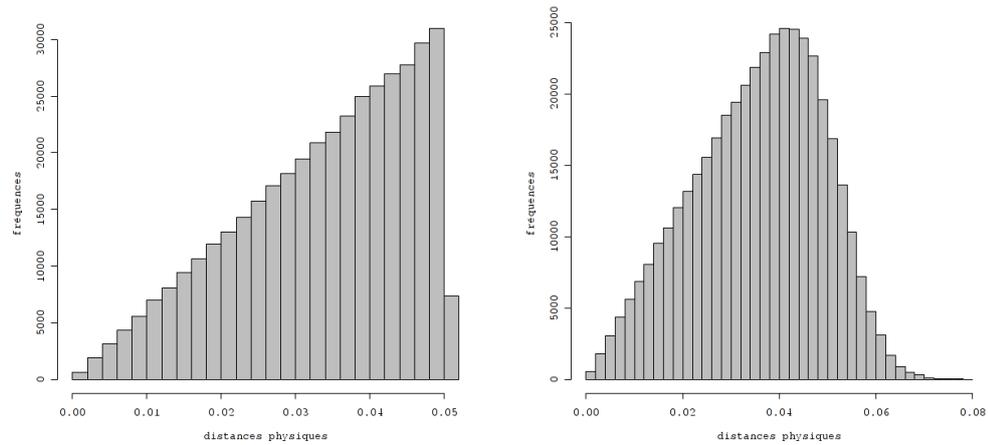
Une chose qu'il faut noter avant de comparer ces modèles c'est qu'ils sont tous déterministes dans les règles de construction des arêtes. La seule partie aléatoire des modèles est la distribution uniforme des nœuds. Cela signifie que ces modèles sont tous comparables à partir d'exemples, car leur construction déterministe.

5.3.1 La distance des arêtes

En page 43 les différentes distributions de distance sont rassemblées dans des graphiques de fréquence. La chose qui est visible tout de suite est que ces distributions sont toutes différentes. Les plus similaires sont celles obtenues par l'utilisation de l'énergie. Les deux modèles obtenus par l'utilisation du rayon sont assez similaires au début, mais celle obtenue en utilisant la distribution normale donne une distribution en cloche asymétrique. Cette asymétrie provient la distribution uniforme des points dans l'espace : les distances ne sont pas uniformément distribuées, mais leur distribution croît, comme expliqué plus haut.

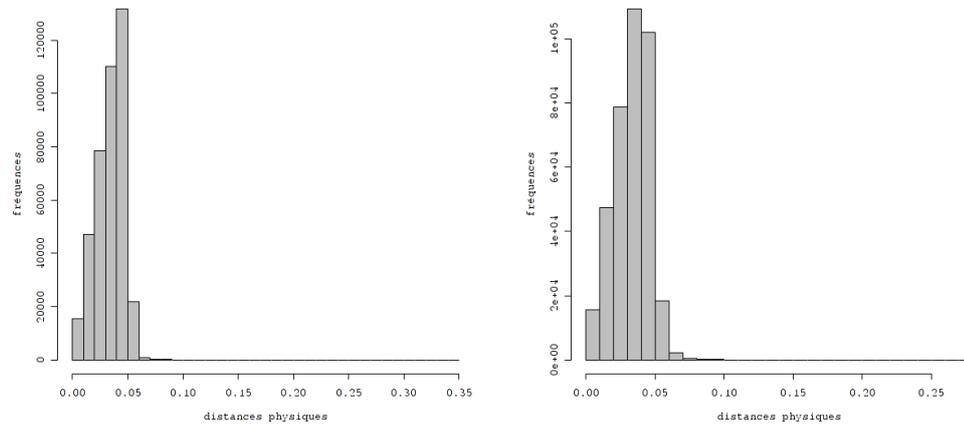
Les deux graphiques obtenus par les modèles utilisant l'énergie sont plus similaires entre eux. La caractéristique qui ressort le plus, c'est que la quasi-totalité des arêtes est courte. Tandis qu'il y a très peu d'arêtes qui sont beaucoup plus étendues que la majorité de ces dernières, leur fréquence est tellement faible qu'ils ne sont même plus visibles sur le graphique.

FIGURE 5.3 – Distributions des distances des arêtes



Rayon fixe

Rayon normalement distribué



Énergie fixe

Énergie normalement distribué

Tous les graphiques ont été créés à partir des exemples avec $n=10000$ utilisés plus haut. Pour les variables utilisées il faut se référer aux tableaux 4.1 (à la page 31), 4.2 (à la page 34), 5.1 (à la page 39) et 5.2 (à la page 41).

5.3.2 Les distributions de degré

Comme nous avons mentionné précédemment, nous allons observer de plus près les différentes distributions de degré auxquelles les modèles donnent lieu. Ces distributions sont représentées par des graphes de fréquence du degré à la page 45.

Dans le cas de ces modèles, toutes les distributions de degré ressemblent fortement à une distribution de Poisson ou une distribution normale, comme il est

possible de déduire des graphiques. Néanmoins, il y a l'exception de la distribution de degré du modèle avec le rayon normalement distribué, comme il est possible de voir avec la figure 5.4 à la page 45.

La ressemblance à la distribution normale ou à celle de Poisson est une conséquence de l'algorithme de création des arêtes qui est fortement limitée par la spatialité du modèle. C'est-à-dire que les nœuds se connectent toujours à des distances courtes à cause du rayon. Par conséquent, le degré des nœuds dépend en grande partie de leur distribution dans l'espace, et celle-ci étant uniforme le modèle avec le rayon fixe se comporte comme des modèles de réseau aléatoires classiques comme le $G(n, p)$, par exemple.

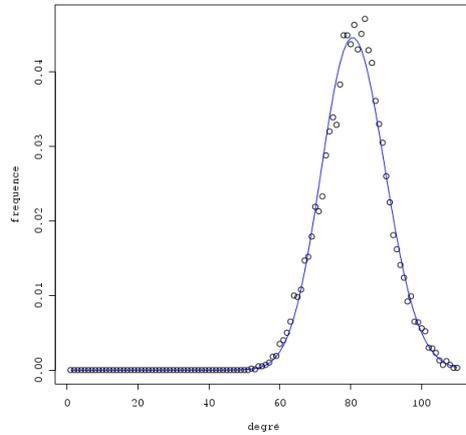
Avec l'utilisation de l'énergie la distribution de degré a plus tendance à suivre une loi normale, dans cette loi la queue n'est pas asymétrique en soi, par contre elle descend plus vite qu'une loi de puissance, ce qui se passe aussi en réalité dans certains réseaux sociaux.

Pour le modèle avec l'énergie normalement distribuée il est difficile de dire si la distribution de degré le modèle suit une loi normale ou une loi de Poisson, en tout cas elle est proche des deux distributions. Mais une queue plus asymétrique est souhaitable.

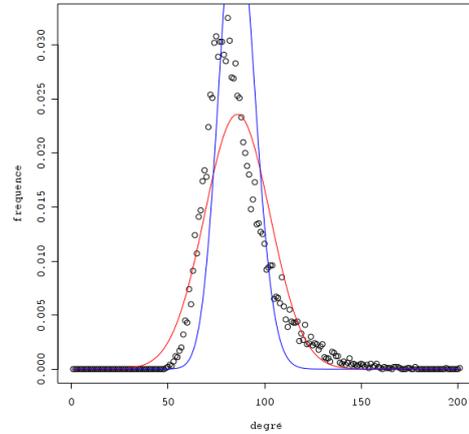
Le modèle qui ne suit clairement pas ces distributions est celui où le rayon est distribué uniformément, une question s'impose : pourquoi ? La réponse est inhérente dans la construction du modèle et la dispersion uniforme des nœuds. En fait, un petit changement dans le rayon auquel un point peut se connecter peut, avec certaines préconditions, faire un grand changement dans le degré. Tout cela dépend de la distribution des distances entre les points. À partir des figures 3.1 à la page 24, il est aisément possible de comprendre pourquoi un petit changement dans le rayon limitant peut augmenter de beaucoup le degré d'un nœud. Car les distributions des distances pour un seul nœud sont très irrégulières, et aussi les fréquences des distances sont croissantes jusqu'à un rayon de 0.5. Cette discussion de la distance est importante parce qu'un seul des deux nœuds qui forment un lien doit avoir un rayon assez long pour créer un lien. Les nœuds avec des rayons courts ont un plus grand degré de ce que leur rayon qu'il ont permet en soi, c'est pourquoi la queue droite de la distribution n'est pas anormale, tandis que la partie gauche de la distribution

croît trop rapidement.

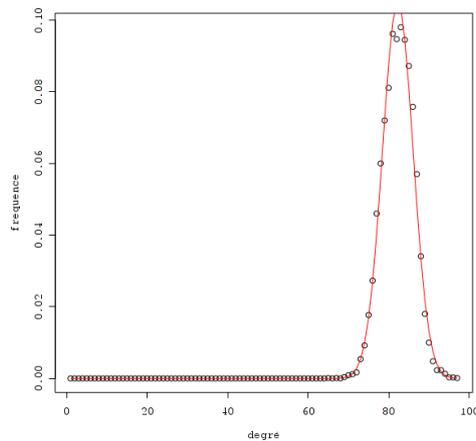
FIGURE 5.4 – Distributions du degré des arêtes



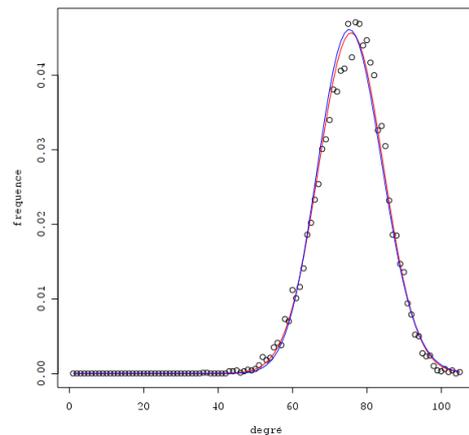
Rayon fixe, avec distribution de Poisson en bleu.



Rayon normalement distribué, avec distribution de Poisson en bleu et la loi normale en rouge.



Énergie fixe, avec la distribution normale en rouge



Énergie normalement distribuée, avec la distribution de Poisson en bleu et la loi normale en rouge.

Tous les graphiques sont pris des exemples des réseaux avec $n=10000$ utilisés plus haut. Pour les variables utilisées et les valeurs des mesures il faut se référer aux tableaux 4.1 (à la page 31), 4.2 (à la page 34), 5.1 (à la page 39) et 5.2 (à la page 41). Les distributions de degré ont été calculées et dessinées avec R.

5.4 Résumé

Il est temps de résumer ces modèles. Les modèles avec un rayon limitant et avec l'énergie ne sont pas équivalents, pourtant ils restent très similaires. La différence plus importante réside dans la distribution des distances des arêtes. Pour le reste, ils se comportent plus ou moins de la même façon. En tout cas, les valeurs des mesures trouvées sont très proches, si en prend en compte que les modèles changent légèrement avec un rayon ou une énergie normalement distribuée.

L'avantage d'avoir l'énergie comme facteur limitant est qu'il est possible de combiner les deux modèles et donc de donner à un nœud une énergie et un rayon d'action.

5.5 Un modèle combiné

Prenons un modèle qui combine l'énergie et le rayon, au sens qu'un nœud ne peut se connecter qu'à des nœuds à une certaine distance donnée par ce rayon. L'énergie est toujours nécessaire pour créer un lien. Ce modèle, dans les deux cas extrêmes, redevient aux modèles qui ont été présentés plus haut. Si le rayon comprend tous les nœuds, c'est seulement l'énergie qui limite la connectivité. Au contraire, si le rayon est court et les nœuds ont beaucoup plus d'énergie à disposition, alors c'est que le rayon qui limite la connectivité.

Vu que la fonction du rayon a changé dans ce modèle, et il est plus similaire à un champ d'action et n'oblige plus les nœuds à se connecter, il sera dès maintenant appelé vision. Ce choix a un avantage, c'est que la vision est plus apte à décrire la nouvelle fonction du rayon. En effet, la vision n'est pas comme le rayon, elle donne aux nœuds une limite qui les force pas à se connecter à tout ce que le cercle par elle crée entoure.

La question par rapport à ce nouveau modèle est : comment se comporte-t-il si certains nœuds sont vraiment limités par que par l'énergie et d'autres par que la vision ? Mais une chose est tout à fait prévisible, c'est que le clustering, qui est beaucoup trop haut et les distances qui sont trop grandes pour un réseau social dans les deux modèles ne vont pas changer de beaucoup dans ce nouveau modèle combiné. Pour aborder ces deux problèmes, il existe une solution éprouvée. En fait, en s'inspirant

du modèle de Watts et Strogatz ¹ cette solution est évidente : il faut créer une partie aléatoire dans la création des liens, et c'est exactement ce qui sera entrepris dans le prochain chapitre.

1. [28]

6

Le modèle énergéico-spatial de réseau social

Dans les chapitres précédents, les modèles spatiaux aléatoires ont été présentés. Ils étaient de deux types, l'un utilisant un rayon pour limiter la connectivité et l'autre l'énergie. Enfin a été posée la question de ce qui se passerait en combinant les modèles, donc en utilisant la vision et l'énergie. La décision a été prise d'augmenter la partie aléatoire dans la création des liens à la place d'explorer le modèle combiné. Le but de ce chapitre est de présenter ce nouveau modèle.

6.1 Le choix

Dans le modèle de Watts-Strogatz les nœuds sont connectés directement à des nœuds proches et avec une certaine probabilité les arêtes sont reconnectées. Cette façon de procéder est une bonne idée pour un modèle théorique, et peut-être dans un modèle dynamique serait une solution si à la place de la probabilité est utilisée une variable qui dépend de la situation dans laquelle un nœud se trouve. La solution appliquée ici est d'utiliser une variable qui permet d'introduire de l'aléatoire directement à la création des arêtes.

Cette solution a l'avantage que les nœuds peuvent choisir avec quel autre nœud rentrer en relation. Évidemment, s'il faut modéliser un choix il faut définir entre quoi choisir et comment choisir. Si les nœuds sont censés être des individus, il est sensé d'utiliser les propriétés de ces dernières pour définir ces deux facteurs du choix.

Dès lors, il me semble assez naturel de présupposer que ces individus rudimentaires veulent maximiser le nombre de relations, étant en donnée l'idée qu'un individu est social en soi. Pour ce faire, il est crucial que le choix implique une minimisation de l'énergie dépensée pour créer un lien, et donc de se connecter au nœud proposé spatialement le plus proche. La façon dont le choix est fait dépend dans ce cas de l'idée d'énergie. Maintenant il est indispensable de définir quel est l'objet du choix du nœud. La vision de ce dernier est une limite naturelle qui englobe tous les nœuds avec lesquels il est possible d'interagir. Le paramètre du choix qui n'est pas encore utilisé et doit donner un tournant aléatoire au modèle doit donc permettre de choisir les nœuds à proposer. Ces deux dernières réflexions portent sur une synthèse simple : le paramètre du choix doit être utilisé pour délimiter la taille de l'ensemble des nœuds proposés pour faire un lien. Cet ensemble, pour sa part, est naturellement délimité par la vision du nœud considéré.

Cette construction intègre la partie aléatoire qui doit abaisser un peu le clustering et les distances mesures sur le réseau créé. Elle a l'avantage, par rapport à une probabilité de changer la connexion des arêtes, d'approcher les nœuds de l'idée d'un modèle d'individu. Parce que les nœuds ont maintenant une énergie, une vision et un choix rudimentaire.

En vue de ces raisonnements, il est indispensable de préciser l'algorithme de création des arêtes. Ce qui est fait dans la section suivante.

6.2 La création des arêtes

Avant de se pencher sur la création des arêtes, il est important de rappeler que la condition initiale du nouveau modèle est la même que dans les modèles déjà présentés. Les nœuds sont toujours distribués uniformément dans l'espace et sont munis d'une énergie et d'une vision propre. Par contre dans ce modèle la création des liens est modifiée et se déroule pas à pas, et est plus compliquée que dans les modèles présentés jusqu'ici. Un pas du modèle se déroule de la façon suivante :

- La liste des nœuds est permutée de façon aléatoire. Ceci pour éviter de donner à chaque pas la primauté à un nœud.
- La liste est parcourue, et pour chaque nœud sélectionné les actions suivantes

sont effectuées :

- - Dans la liste des nœuds visibles une sélection aléatoire est compilée. Cette sélection a la taille égale à la taille de la liste des nœuds visibles multipliés par le paramètre du choix.
- Dans cette liste de nœuds choisis, est choisi le nœud plus proche.
- Les deux nœuds asseyent de se connecter.
- Si les deux nœuds ont chacun 50% de l'énergie pour payer le cout énergétique pour créer le lien, ce dernier est créé et l'énergie enlevée aux deux nœuds. Sinon le lien n'est pas créé.

Cet algorithme continue pas à pas, jusqu'à ce qu'aucun lien n'a été créé en ayant parcouru la liste des nœuds d'un bout à l'autre. Un pseudocode de la démarche qui vient d'être décrite est disponible ci-dessous.

Algorithm 3 Création des arêtes avec un réseau énergétique-spatial aléatoire

```
boolean energyChange = TRUE
while energyChange do
  energyChange = FALSE
  for all  $i \in \text{RandomizedList}(\text{nodes})$  do
    while  $\text{chosen.size}() < \text{choice} * \text{nodesVisibleBy}(i).\text{size}()$  do
      chosen.add(UnifomeChoice(nodesVisibleBy(i)))
    end while
     $j = \min_{k \in \text{chosen}} \text{distance}(i, k)$ 
    distance = distance(i, j)
    if distance  $\leq$  visionOf(i) then
      if availableEnergy(i)  $\geq$  distance * 50%  $\wedge$  availableEnergy(j)  $\geq$  distance * 50% then
        addLink(i, j)
        energyChange = TRUE
      end if
    end if
  end for
end while
```

Par rapport à la création des arêtes, il faut rappeler que le cout d'un lien reste le même que dans les modèles utilisant l'énergie présentés au chapitre précédent. Ce qui change est la partie de choix (ou aléatoire), et l'utilisation de la vision. Il est donc important de montrer comment ces paramètres interagissent, ce qui est fait dans la section suivante.

6.3 L'énergie, la vision et le choix

Ce nouveau modèle pose un certain nombre de problèmes quant aux paramètres. En effet, les trois paramètres ont une influence sur tout le modèle. Par exemple si la vision est trop courte et l'énergie assez grande, le choix devient inutile comme paramètre parce que le modèle devient à nouveau un modèle spatial aléatoire limité par le rayon. Il y a d'autres cas où les résultats de ce modèle ne sont pas simples à prévoir. En tout cas, un des paramètres centraux est celui du choix.

Ce choix dans le modèle proposé est une quantité entre $]0, 1]$, s'elle est proche de 0 le nœud en question se voit proposer très peu de nœuds auxquels il pourrait se connecter. Dans le cas inverse, donc avec une valeur égale à un, le modèle devient déterministe (dans la création des liens), dans le sens qu'il redevient un modèle spatial aléatoire, limité par l'énergie ou un rayon à dépendance des relations entre ces deux autres variables.

Dès lors, la question est, combien d'aléas est nécessaires dans ce modèle ? Et plus largement comment doivent s'articuler les paramètres pour créer un réseau avec une structure de réseau social. En raisonnant, sur le réseau réel incarné par l'exemple du réseau d'amis il est possible de délimiter les réponses à ces deux questionnements. Reformulons les questions par rapport à l'exemple : entre combien d'amis potentiels, parmi tous les contacts dans l'environnement social, un ami doit être choisi ? La taille du nombre d'amis potentiels est déterminée par le paramètre du choix, tandis que celle de l'espace social est déterminée par la vision. La troisième question qui limite le choix est : à quel point une distance spatiale courte doit-elle être privilégiée ?

À la première question, il est assez facile de répondre, d'une part la vision de l'espace social d'un seul individu est assez limitée. Il est par exemple très difficile de rencontrer toutes les personnes habitantes dans une ville. D'autre part, le choix d'un ami est généralement fait à partir d'un groupe restreint. En effet en s'imaginant un pas du modèle comme une journée dans la vie du nœud en question, il est difficile que celui-ci rencontre tous les autres individus qu'il a la possibilité de voir dans son espace social. La deuxième question est plus ardue. Le modèle privilégie en soi des relations proches, ce qui est dû à la façon dont le choix d'un ami est fait, mais la variable du choix a une influence directe sur la réponse de cette question. En ef-

fet, vu que la distribution des distances est croissante, comme montrée par la figure 3.1 à la page 24, avec un choix restreint c'est les relations distantes qui sont privilégiées, parce que la probabilité de les retrouver dans le groupe d'amis potentiels est plus grande. Au contraire, si le choix est grand les relations proches deviennent favorisées, mais cette deuxième option diminue la partie aléatoire du modèle. Pour répondre à toutes ces questions, il est possible de créer des modèles avec des paramètres changeants, et d'en discuter les mesures. Ce qui est fait dans la prochaine section.

6.4 Changement des paramètres et mesures

Les modèles sur lesquels les résultats qui suivent s'appuient sont tous faits avec un nombre de nœuds de 2000¹. Les modèles créés varient donc le choix entre 5% et 10% la vision moyenne entre 0.1 et 0.8² et l'énergie moyenne entre 0.48 et 0.56. J'ai fait le choix de distribuer la vision et l'énergie de façon normale les deux avec une variance égale à un sixième de la valeur moyenne, en suivant le raisonnement que les nœuds doivent être vu comme des individus, et qu'il est illusoire de les supposer tous égaux. Les valeurs du choix ont été choisies en fonction des raisonnements faits plus haut, celles de l'énergie pour avoir un degré moyen autour de 20. L'idée de cette démarche étant de garder le degré moyen le plus fixe possible, pour créer des réseaux épars. Les résultats sont présentés de suite, et comprennent les 440 réseaux calculés.

6.4.1 Le degré moyen

Comme il est possible de voir dans les graphiques qui suivent le degré moyen varie en fonction des trois paramètres du modèle, il a tendance d'augmenter avec le choix et l'énergie moyenne, mais de diminuer avec l'augmentation de la vision moyenne.

1. Ce choix a été nécessaire à cause du temps de calcul pour créer le modèle et pour calculer certaines mesures.

2. Si la vision équivaut à ce deuxième paramètre, tout l'espace social devient visible.

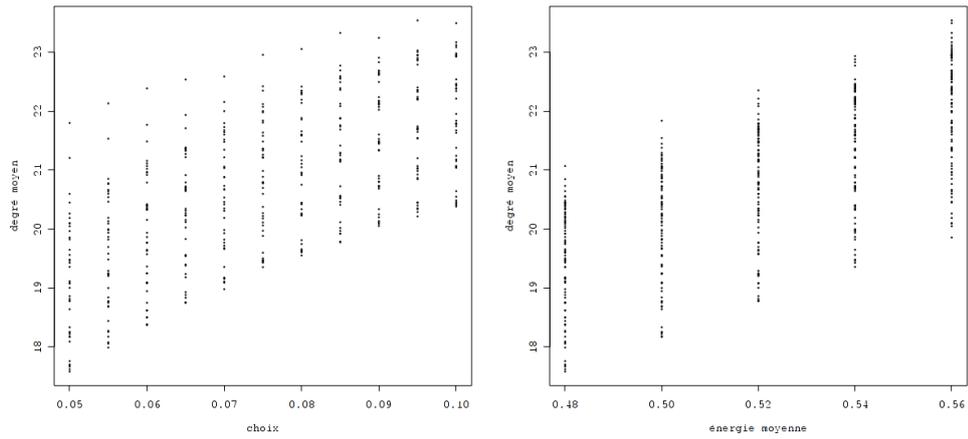


FIGURE 6.1 – Degré moyen en fonction de choix. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes. FIGURE 6.2 – Degré moyen en fonction de l'énergie. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

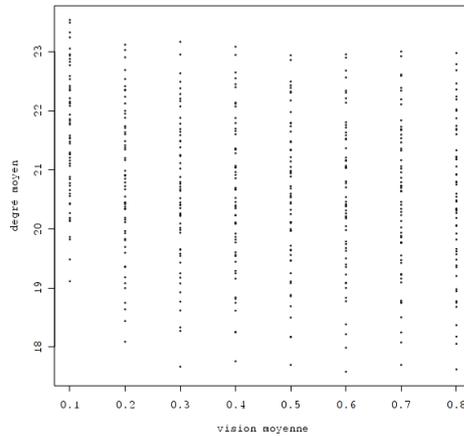


FIGURE 6.3 – Degré moyen en fonction de la vision. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

Le fait que le degré moyen augmente si le choix augmente est dû au fait que les nœuds se connectent toujours aux nœuds le plus proches dans un choix de nœud donné. Si ce choix augmente la probabilité de trouver des nœuds plus proches, augmente aussi, et donc l'utilisation moyenne de l'énergie nécessaire pour faire un lien diminue. Il s'ensuit que cette augmentation du degré moyen est tout à fait prévisible. Comme pour l'augmentation du choix l'augmentation de l'énergie provoque une augmentation analogue du degré moyen. Ceci est dû au fait que plus les nœuds ont de l'énergie plus ils peuvent "payer" la création de nouvelles arêtes. Ce phénomène est donc aussi directement dépendant de la manière dont le modèle est créé. Le fait que l'augmentation de la vision fait diminuer légèrement le degré moyen

est dû au fait que les nœuds disponibles parmi lesquels des candidats sont choisis pour créer un nouveau lien. Il s'ensuit que la probabilité de tomber sur des nœuds proches est diminuée et donc le cout, des liens créés, est plus élevé.

6.4.2 Le clustering, l'assortativité et la modularité

Le prochain point important est de voir comment évoluent les mesures du clustering de l'assortativité et de la modularité. Les graphiques ci-dessous montrent le rapport que ces mesures ont aux paramètres du modèle.

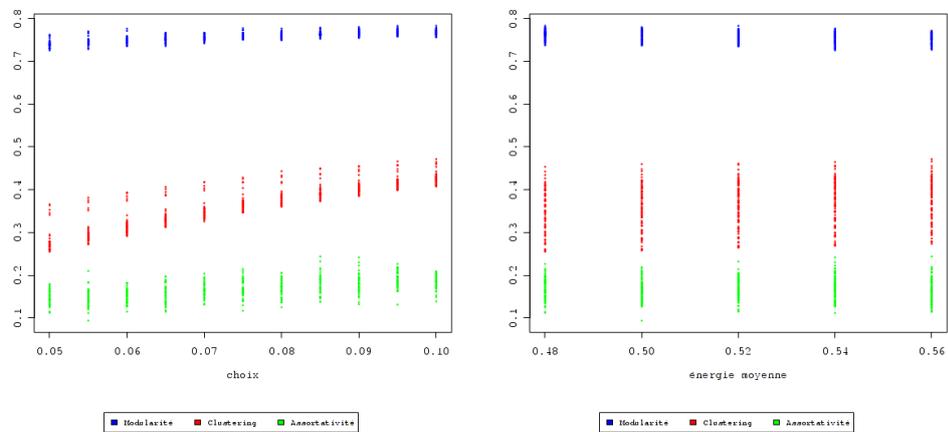


FIGURE 6.4 – Mesures du clustering, de l'assortativité et de la modularité en fonction du choix. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

FIGURE 6.5 – Mesures du clustering, de l'assortativité et de la modularité en fonction de l'énergie. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

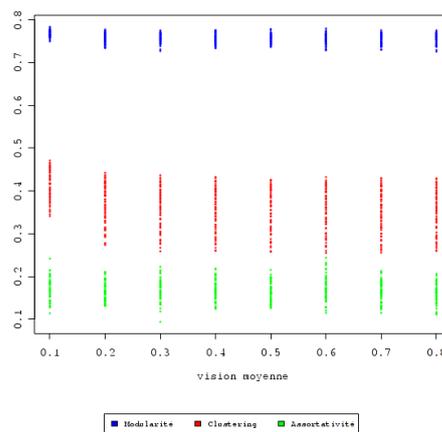


FIGURE 6.6 – Mesures du clustering, de l'assortativité et de la modularité en fonction de la vision. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

La valeur prise par le clustering reste stable autour de 0.35, les deux paramètres qui l'influencent sont le choix et la vision. L'influence de ces derniers a des causes analogues à celles expliquées plus haut par rapport au degré moyen. En effet, s'il y a plus de nœuds au choix pour créer une nouvelle arête, la probabilité que des nœuds proches soient sélectionnés augmente. En ce sens il devient aussi plus probable de créer des relations triangulaires avec ces nœuds proches.

Quant à l'assortativité et à la modularité celles-ci sont stables dans des intervalles tout à fait convenables pour un réseau social. Le réseau reste assortatif avec une valeur stable entre 0.1 et 0.2. Tandis que la modularité entre 0.7 et 0.8 indique que les communautés détectées sont bien définies.

Donc pour le moment les réseaux créés ont tout à fait les mesures communes aux réseaux sociaux, résumés dans le tableau 3.2 (à la page 22). Les prochaines mesures importantes sont celles liées aux distances.

6.4.3 Les distances

En parlant de distances, il est important de faire la distinction entre les distances physiques des nœuds dans l'espace, et celle dans le réseau. Dans cette section elles vont être traitées séparément, en commençant par les distances physique.

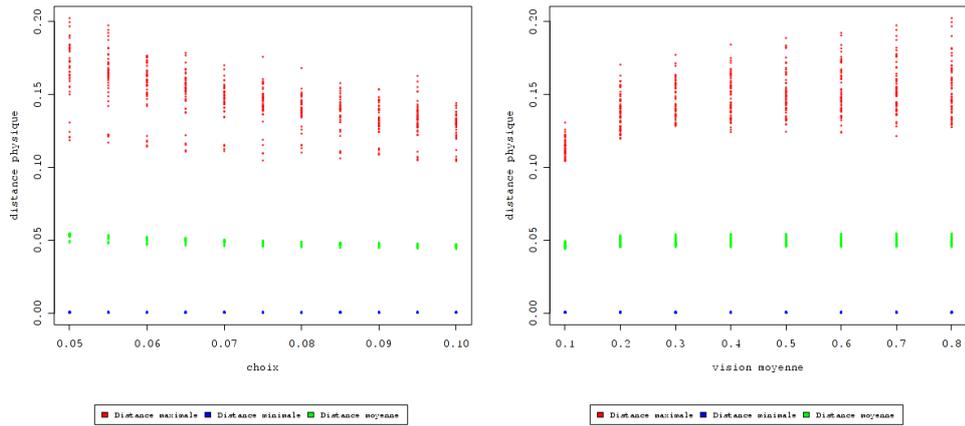


FIGURE 6.7 – Distances dans l’espace en fonction du choix. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes. FIGURE 6.8 – Distances dans l’espace en fonction de la vision moyenne. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

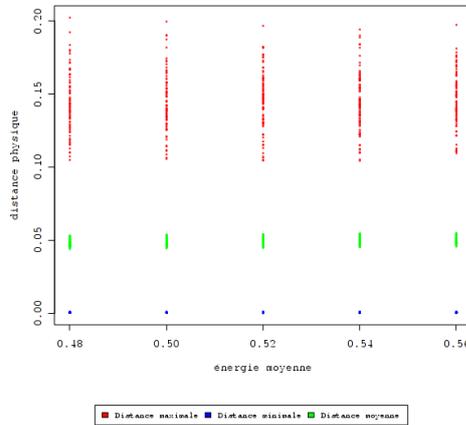


FIGURE 6.9 – Distances physiques en fonction de l’énergie moyenne. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

Comme les graphiques laissent transparaître, l’influence des paramètres n’est pas trop sentie par la distance minimale ni la distance moyenne. Par contre, la vision moyenne et le choix influencent la distance maximale sur laquelle une arête s’étend dans l’espace. Ce résultat confirme l’intuition développée quand il fallait expliquer l’influence de ces paramètres sur le clustering et le degré moyen. En effet, un choix plus grand diminue cette distance maximale, et la vision logiquement la limite la distance maximale. Par contre par rapport à l’élargissement de la vision, la distance maximale augmente beaucoup plus lentement. Ceci est dû au fait que les nœuds choisissent toujours le nœud le plus proche quand des liens possibles leur sont proposés. Les phénomènes notés ici indiquent aussi un changement des

distances mesurées dans le réseau. Ces distances sont illustrées par les graphiques ci-dessous.

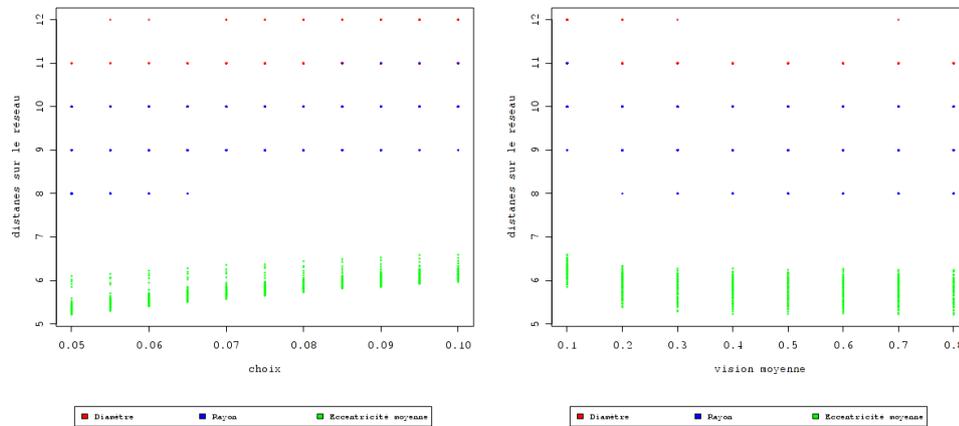


FIGURE 6.10 – Distances sur le réseau en fonction du choix. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes. FIGURE 6.11 – Distances sur le réseaux en fonction de la vision moyenne. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

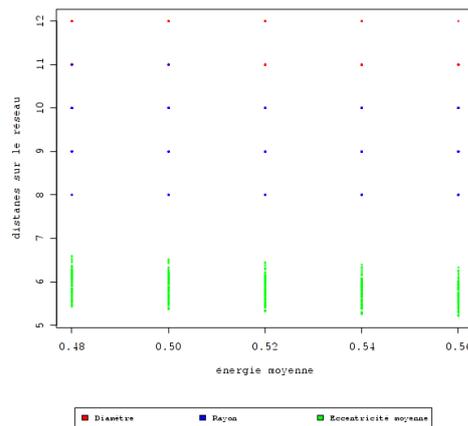


FIGURE 6.12 – Distances sur le réseau en fonction de l'énergie moyenne. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

En analysant les graphiques qui illustrent les distances mesurées sur le réseau, la mesure qui change de façon la plus marquée est la moyenne de la distance des chemins les plus courts. Tandis que le rayon et le diamètre du réseau sont moins variables. Ce qui est tout à fait normal, en effet, en vu de la petite variation des distances physiques maximales il est normal que le rayon et le diamètre restent assez stables. D'ailleurs, les distances physiques maximales indiquent les connexions distantes dans le réseau, donc les arêtes qui sont responsables plus que toutes les

autres de la modification de ces deux mesures sur le réseau.

Pour revenir aux distances moyennes des plus courts chemins, celles-ci sont plus parlantes du fait qu'elles traitent plus d'informations. Comme dans la lecture des graphiques faite précédemment, ces distances diminuent avec l'augmentation de la vision moyenne et diminuent avec l'augmentation du facteur de choix. Les raisons de ce changement ont déjà été expliquées.

L'information importante qui est amenée par ces derniers graphiques est double. D'une part, si une lecture parallèle est faite avec les distances physiques il faut noter qu'elles sont pareillement influencées par les paramètres, ce qui indique qu'elles ne sont pas indépendantes. Le modèle étant créé à partir des nœuds inscrits dans l'espace il faut en conclure que les distances sur le réseau sont directement dépendantes des distances physiques. Ce qui est démontré par les graphiques suivants :

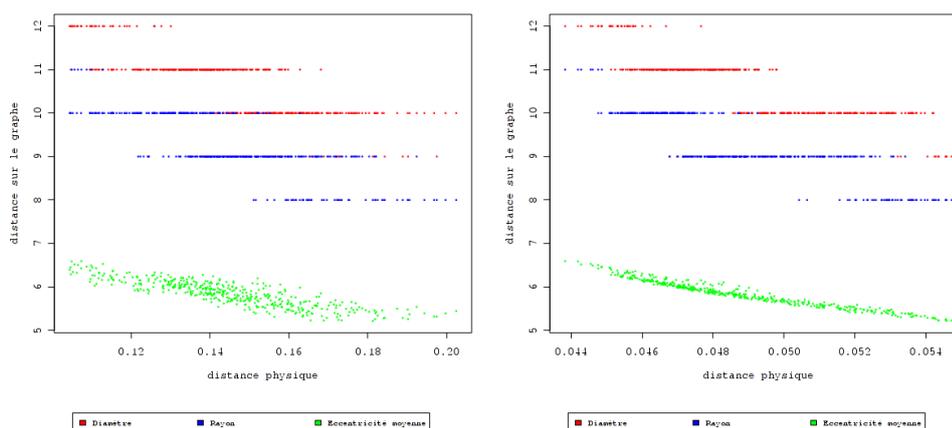


FIGURE 6.13 – Distances sur le réseau en fonction des distances physiques maximales. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

FIGURE 6.14 – Distances sur le réseau en fonction de la distance physique moyenne. Modèles avec 2000 nœuds et variables changeantes.

Ces dernières figures sont la preuve que plus la distance physique des arêtes augmente plus les mesures importantes sur le réseau diminuent. Ce résultat est logique, vu la construction du modèle, mais il confirme que dans ce modèle les nœuds et le réseau modélisé sont inscrits dans l'espace physique qui simule l'environnement. Cette dernière observation est importante parce que cette inscription dans l'espace physique du réseau social est le but explicite de ce travail. Même s'il en est ainsi

il reste la question de la pertinence du modèle créé, qui sera l'objet de la section suivante.

6.5 Un réseau énergéico-spatial

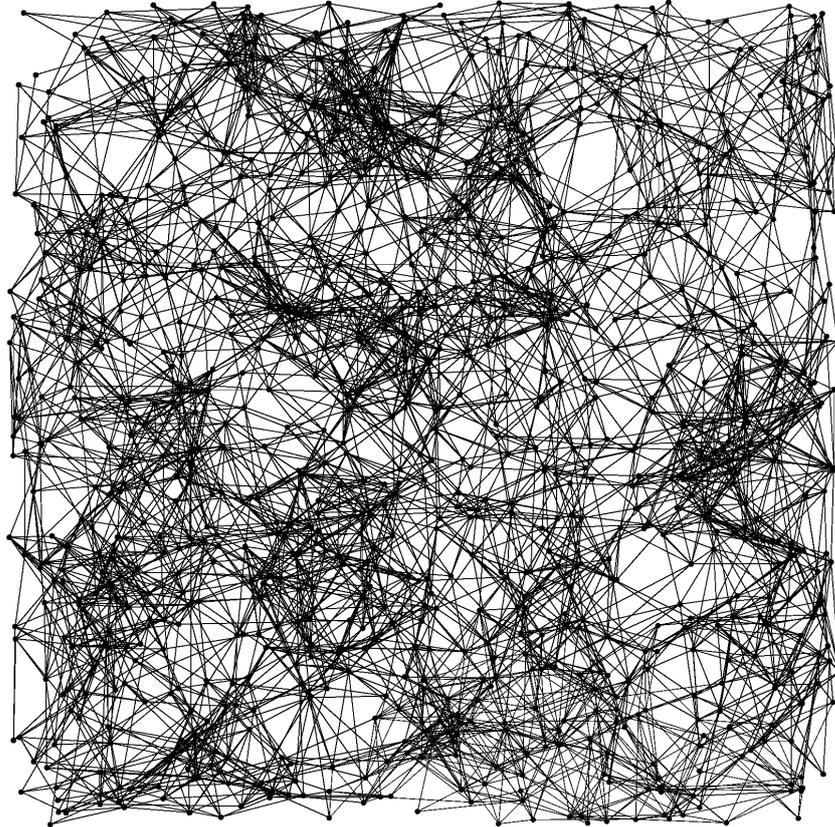


FIGURE 6.15 – Réseau spatial aléatoire sur un plan de dimension 1x1 avec 1000 nœuds énergie normalement distribuée (0.6,0.1), vision normalement distribuée (0.45,0.075), et choix 4%

Comme toujours à partir d'une figure il est difficile de voir les propriétés structurales d'un réseau. Par contre, il est possible de confronter cette image avec celles des autres réseaux présentés. Il est alors possible de noter que ce réseau est moins dense que les autres avec plus de liens distants, évidemment pour plus de détail il faut regarder le tableau des propriétés de ce réseau (voir tableau 6.1 à la page 60).

Mesure	Valeurs	Commentaire
Nombre de nœuds	10000	Cette valeur a été fixée comme paramètre du modèle, étant assez haute elle garantit une certaine précision dans les autres mesures.
Nombre d'arêtes	398443	
Degré moyen	79.689	
Distribution de degrés		5.4 (à la page 45)
Clustering	0.351	Cette valeur est une valeur proche de celle d'un réseau social.
Assortativité	0.101	Ici aussi un réseau social peut avoir une valeur similaire.
Diamètre	10	Les distances ont un peu diminué par rapport aux autres réseaux
Rayon	9	
Distance moyenne	5.657	
Modularité	0.742	
Communautés détectées	12	

TABLEAU 6.1 – Réseau énergéico-spatial avec choix.

Mesures du modèle énergéico-spatial sur un tore obtenu avec $n = 10000$, énergie normalement distribuée (1.76, 0.293), vision normalement distribuée (0.1, 0.017), et choix de 0.015.

Comme il est possible de voir, les mesures importantes ont diminué par rapport aux modèles présentés auparavant. La structure du modèle est déjà plus proche de celle d'un réseau social. En effet, les distances ont diminué, la valeur du clustering est plus vraisemblable, l'assortativité reste toujours positive. La valeur de la modularité est un peu plus basse, mais les communautés restent bien définies. Les deux distributions discutées pour les autres modèles présentés à la fin du chapitre précédent sont illustrées ci-dessous.

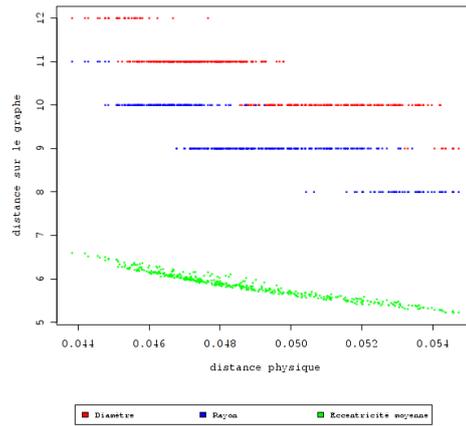
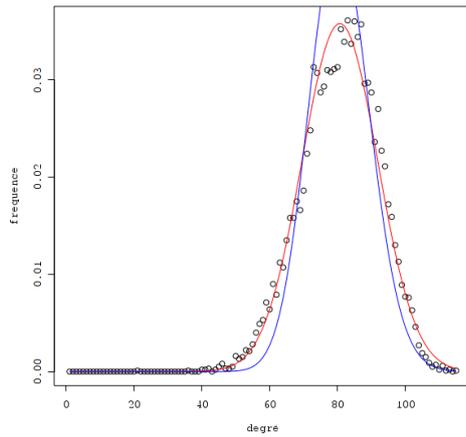


FIGURE 6.16 – Distribution de degré modèle énergétique-spatial sur un tore obtenu avec $n = 10000$, énergie normalement distribuée (1.76, $n = 10000$, énergie normalement distribuée 0.293), vision normalement distribuée (0.1, (1.76, 0.293), vision normalement distribuée 0.017), et choix de 0.015. Avec une distribution de Poisson en bleu et une distribution normale en rouge.

La distribution de degré reste similaire à celles déjà illustrées pour les modèles précédemment discutés. Mais elle montre quand même des différences par rapport aux distributions de Poisson et celle normale dans la façon dont elle descend à droite. Dans un cas plus idéal d'un réseau social, la queue à droite de la distribution devrait être plus longue. Donc, cette distribution montre une faiblesse du modèle. Quant à la distribution des distances, celle-ci montre une forme intéressante, qui semble combiner la longue queue vue dans les modèles aléatoires spatiaux utilisant l'énergie, et celui avec un rayon normalement distribué.

Toutes ces mesures ayant été discutées il est temps de se demander si le modèle de réseau social énergétique-spatial est pertinent.

6.6 Pertinence du modèle

Est-ce que le modèle est pertinent ? La réponse n'est pas évidente.

D'une part, un modèle spatial qui crée la structure d'un réseau social devait être créé, ce qui a apparemment été fait. Le modèle énergétique-spatial présenté colle assez bien aux valeurs des mesures que prennent les réseaux sociaux. Aussi les idées qui sont à la base du modèle semblent assez en accord avec la réalité d'un

acteur social, inscrit dans un espace. Évidemment, le modèle simplifie beaucoup cette réalité, ce qui est la fonction principale d'un modèle.

Le modèle pour le moment reste une construction complètement théorique. En effet, pour l'appliquer à des réseaux sociaux réels il faudrait déterminer ce qu'est l'énergie dans la réalité, et comment se structure l'espace social et la distance dans cet espace. Il est donc impossible de déterminer sa pertinence opérationnelle. D'autre part, le fait de devoir répondre à ces questions est en soi un bon signe, parce que, cela met en évidence des problématiques qui peut-être, sous cette forme, sont nouvelles.

Synthèse

Dans ce chapitre le modèle énergético-spatial a été présenté. Ce modèle produit des réseaux ayant la structure d'un réseau social si les bons paramètres sont choisis. La seule faiblesse qui reste dans le modèle est la distribution de degré qui devrait être plus proche d'une loi de puissance. Par contre, le facteur principal qu'une distribution de degré d'un réseau social montre est une asymétrie à droite, ce qui dans ce modèle est également le cas. Cette faiblesse n'est donc pas aussi importante. Dans le chapitre prochain seront discutées des méthodes pour améliorer le présent modèle, et ce point sera abordé plus en détail.

7

Idées pour une recherche future

Le modèle présenté dans le chapitre précédent est certainement intéressant, mais il est aussi certain qu'il est possible de l'améliorer. Pour faire cela, il faudrait essayer d'autres règles de connexion, ou carrément le rendre évolutif. Dans ce chapitre des idées seront mises en avant de comment s'y prendre pour arriver à distiller un modèle meilleur. Les idées qui suivent n'ont pas été testées et sont plus de l'ordre de l'intuition, mais sans cela il est difficile d'avancer dans la recherche. En outre en jouant avec des idées pour améliorer le modèle présenté ce modèle deviendra plus clair, parce que certains choix deviennent plus explicites.

7.1 Faiblesses et améliorations possibles

Une faiblesse est que la distribution de degré devrait être plus asymétrique à droite, avec une queue plus longue. À la suite seront présentées des idées sur des essais possibles. L'autre faiblesse est que la distance entre les nœuds pourrait devenir encore plus petite.

7.1.1 Changer les distributions

En pensant aux communautés, il y a beaucoup de différentes possibilités. La première est de changer la distribution des points sur l'espace, en utilisant des distributions qui posent les points en formant des groupes déjà avant de procéder à la modélisation, cette idée devrait créer des communautés plus fortement connectées à leur intérieur qu'avec l'extérieur. Une variante de cette option est d'ajouter

une dimension supplémentaire au modèle qui est distribué de la façon proposée, mais en laissant les nœuds distribués uniformément sur l'espace existant. En incorporant cette nouvelle dimension dans la mesure de la distance. Dans la première option, les communautés resteraient purement spatiales, mais mieux définies. Dans la deuxième la nouvelle dimension pourrait fonctionner comme un espace culturel.

Pour la faiblesse liée à la distribution de degré il est possible de changer la distribution de l'énergie, qui pourrait avoir une queue plus longue à droite elle-même ce qui devrait augmenter assez l'énergie de certains points pour leur permettre de devenir des hubs, et donc augmenter l'asymétrie de la distribution de degré. Il est aussi probable que cette option augmente l'intraconnectivité d'une potentielle communauté si la vision de quelques un de ces points avec beaucoup d'énergie est assez petite et il se connecte donc à tous les autres nœuds qui lui sont proches.

Il est possible d'appliquer tous les changements proposés en même temps, pour en étudier les effets.

7.1.2 Changer de distances

Cette proposition est dans un certain sens similaire à celle faite plus haut, mais dans ce cas l'idée n'est pas de changer la distribution des nœuds, mais l'espace. Pour ce faire une idée c'est d'ajouter une espèce de gravité, qui comme dans la théorie d'Einstein courbe l'espace. Cette gravité pourrait dépendre de l'énergie d'un point ou alors de ces liens ou des deux à la fois. Un nœud avec une gravité haute serait moins distant et donc il faudrait moins d'énergie pour s'y connecter et il lui faudrait moins d'énergie pour avoir plus de liens.

Dans le cas où la gravité dépend de l'énergie, il est possible de la faire dépendre de l'énergie totale d'un point à sa création, de l'énergie utilisée ou de celle qui lui reste. La chose meilleure est d'utiliser l'énergie totale ou celle consommée, ce deuxième cas sera discuté plus tard. D'utiliser l'énergie restante n'est pas une bonne idée dans le sens que la distribution de degré serait probablement uniformisée, d'autre part ceci permettrait probablement de diminuer les distances. Tandis qu'en utilisant l'énergie totale, il est possible d'avoir un effet similaire à un attachement préférentiel, pour les nœuds qui ont beaucoup d'énergie à la base, ce qui serait bénéfique pour la distribution de degré et pour la distance, à cause de la possibilité

d'avoir des hubs, et peut être aussi pour les communautés, selon le raisonnement fait plus haut.

L'autre option est de créer cette gravitation par rapport aux liens qu'un nœud a, dans une façon similaire au modèle de Barabási et Albert¹. Le problème dans ce cas est que dans un pas du modèle théoriquement tous les nœuds ont au moins une connexion, et peut-être il faudrait pour que cette option soit efficace changer cet aspect du modèle. Sauf si comme proposé plus haut l'énergie des liens réalisés est prise en compte.

Dans le cas où la gravité augmente avec l'utilisation de l'énergie les nœuds qui font des connexions distantes sont avantagés, et ceux qui font des connexions locales le sont moins, ce qui serait probablement un problème pour le clustering. Dans le cas opposé, ces remarques sont vraies pour la distance. Le problème en soit est que la probabilité de choisir des nœuds proches n'est pas affectée par la gravité et en regardant la distribution des distances 3.1 à 24, cette probabilité est faible parce que le choix est fait uniformément et les nœuds proches sont peu en nombre. Cette remarque ouvre une autre option pour améliorer le modèle.

7.1.3 Changer les probabilités

Une autre option est de changer les probabilités de choisir les nœuds auxquels un nœud peut se connecter. Dans le sens que cette probabilité ne serait plus uniforme, mais que toutes les distances (à l'intérieur de l'espace visible) auraient une probabilité uniforme d'être choisies pour une connexion. Ceci augmenterait les liens courts dans le modèle, ce qui peut-être augmenterait les distances dans le modèle.

Mais il est aussi possible de prendre en compte une éventuelle gravité comme celle proposée plus haut, ce qui augmenterait les chances des nœuds déjà fortement connectés d'augmenter leur degré.

7.1.4 Remarques

Toutes les idées citées plus haut n'ont pas été implémentées dans le modèle présenté, et probablement il serait intéressant de le faire. Le modèle énergétique-spatial se voulait simple et est n'est pas vraiment, pour le moment, complètement exploré.

1. [3]

Toutes ces idées ajoutent une couche de complications au modèle, mais sans vraiment changer son fonctionnement de base. Dans la prochaine section, l'idée est de changer complètement le modèle en passant d'un modèle statique à un modèle évolutif. Les idées présentées jusqu'ici peuvent aussi être appliquées à un modèle évolutif, mais probablement aussi que dans un deuxième temps.

7.2 Un modèle énergéico-spatial évolutif

Le modèle énergéico-spatial est intéressant à cause de l'énergie et l'utilisation d'une partie aléatoire, mais il est figé dans le temps. En effet, il a été conçu pour l'être. Ceci n'empêche pas qu'il soit possible de le faire devenir évolutif, ce qui se rapproche plus de la réalité de ce qui se passe en société. Donc dans cette section seront discutées des idées de comment arriver à un modèle évolutif basé sur le modèle énergéico-spatial.

7.2.1 La création et la destruction des liens

Les arêtes dans le modèle énergéico-spatial peuvent être créées, et virtuellement toutes en même temps, mais pas détruites. Dans une société des liens se créent à des temps différents et peuvent aussi se dissoudre. Les questions auxquelles il faut répondre pour modéliser cela sont : quand est-ce qu'un lien est créé ? Et quand est détruit un lien ?

La réponse à ces questions est centrale pour un modèle évolutif, et donne lieu à un certain nombre d'autres problèmes. Par exemple s'il est supposé que les nœuds restent fixes comme dans les modèles présentés et on pose les deux questions ci-dessus. La réponse doit être qu'il faut une variable aléatoire qui détermine ces deux comportements. Parce que si les nœuds ne bougent pas les conditions qui soutiennent la création d'un lien ne changent pas, et donc il n'y aurait aucun sens de changer un lien. Il est donc nécessaire que les nœuds se déplacent dans l'espace, ce qui a du sens, si est présumé modélisé un espace social, en effet les personnes se meuvent. Il faut donc discuter cet aspect, avant de proposer des méthodes pour changer les liens.

7.2.2 Le mouvement des nœuds

Le mouvement des nœuds est certainement aussi central au modèle que la création et destruction des liens. Est-ce qu'ils se déplacent aléatoirement ? À quelle vitesse ? Quand est qu'un nœud reste fixe, s'il reste fixe ? Est-ce qu'ils utilisent la même énergie pour bouger que celle qui est utilisée pour créer et maintenir les liens ? Est-ce qu'ils bougent en groupe ? Si oui, quel type de groupes ?

Ce sont des questions auxquelles il est difficile de répondre, mais il est possible de faire des suppositions par rapport aux mesures qu'un modèle donnerait, et d'autres effets que certains choix ont sur la pertinence du modèle. Par exemple s'il est supposé que les nœuds bougent aléatoirement et à une grande vitesse, en conservant les restrictions de l'énergie utilisée pour garder les liens, le modèle ne ferait alors plus grand sens, parce que l'évolution du modèle devient quasi impossible à étudier. Ceci est dû au fait que les liens seraient trop instables, en effet il devraient se défaire si deux nœuds ont trop de distance entre eux. Il est cependant possible de trouver des réponses grâce à ces suppositions et leurs conséquences. Premièrement, les nœuds doivent bouger "lentement" et deuxièmement, les liens se défont quand deux nœuds sont trop éloignés et donc n'ont plus assez d'énergie pour maintenir la connexion. Ici aussi il faut faire attention, parce qu'un nœud devrait choisir d'une façon ou d'une autre de garder un lien qui demande beaucoup d'énergie ou si le couper et se lier à des nœuds plus proches.

7.2.3 La complexité du modèle

À quel degré de complexité doit obéir un modèle ? C'est une question qui a une réponse simple et une réponse compliquée. La réponse simple est qu'un modèle complexe est un oxymore en soi, parce qu'un modèle ne fait du sens que s'il est capable de simplifier la réalité. S'il est possible d'avoir accès à toutes les lois et mesures qui régissent la réalité il ne sert à rien d'en faire un modèle.

La partie difficile de la réponse est une autre question : en ayant une réalité complexe (et un réseau social est un système complexe), à quel degré un modèle simple peut rendre compte de cette réalité ? Dans l'étude des systèmes complexes, l'émergence est un facteur clé. L'émergence dans ce cas est le nom donné au phénomène de la création de systèmes complexes à partir de règles simples. Le jeu de la vie en est un

exemple. Pour les modèles de systèmes complexes, l'émergence s'applique aussi. Donc les règles pour créer un modèle doivent être simples. En ayant cette idée en tête, retournons au modèle.

7.2.4 Les nœuds

La question était si les nœuds doivent avoir un choix dans la résilience des liens. Pour y répondre le cours d'action, le plus sage est de tester deux façons de fonctionner. L'une ou des nœuds gardent les connections en s'éloignant jusqu'à quand l'énergie ne suffit plus. L'autre avec certaines conditions plus élaborées les connections qui commencent à couler trop sont coupées d'office, mais il y a un autre problème par rapport aux nœuds. Est-ce que le nœud doit être mortel, c'est-à-dire disparaître, et de naître ? La réponse ici est que dans un deuxième temps ça pourrait être le cas. S'il faut passer à un modèle évolutif à partir d'un modèle statique le plus simple est de d'abord modéliser une fraction de temps sans se préoccuper de tout vouloir expliquer.

7.2.5 Facteur de test pour créer un modèle

Les points importants d'un modèle évolutif qui ont pu être dégagés par les raisonnements sont les suivants :

Premièrement, les nœuds doivent bouger, mais "lentement" probablement avec des trajectoires qui sont influencées par les arrêtés déjà en place. Deuxièmement, les liens doivent pouvoir être coupés, ce qui dépendra de l'énergie qu'il faut payer pour conserver le lien.

À partir de là, il est difficile de faire d'autres prévisions sans faire un modèle et tester comment il se comporte. Par contre, il est possible d'identifier des facteurs déterminants pour voir si certains choix dans la création du modèle sont adéquats. La faiblesse principale du modèle statique énergéico-spatial, est que les communautés ne sont pas très bien définies. C'est un des points qu'un modèle évolutif doit améliorer. À un niveau de spéculation le fait que le modèle énergéico-spatial est statique est probablement la cause de sa faiblesse par rapport aux communautés, parce que, en se référant à la réalité, les communautés doivent se former, et sans les nœuds qui bougent il est difficile de les former.

L'autre chose qui fait défaut au modèle statique est une distribution de degré qui suggère quelque chose de plus proche d'une loi de puissance. C'est pourquoi, si les autres mesures de la structure du réseau restent plus ou moins fixes, ces deux seront les facteurs discriminants dans le choix de règles pour un modèle évolutif, basé sur des paramètres et règles du modèle statique énergétique-spatial.

Remarques

Il est possible de spéculer davantage sur comment devrait être construit un modèle évolutif de réseau social basé sur l'énergie et l'espace, mais il faudrait à partir de certaines idées le créer et voir ce que ça donne pour pouvoir le changer de façon adéquate. Les spéculations sont ici terminées, et il sera dans le prochain chapitre temps de conclure sur ce que le modèle énergétique-spatial est et permet d'apprendre.

8

Conclusions

Le but de ce travail était de créer un modèle spatial de réseau social. Le dernier modèle présenté est le résultat auquel il a été possible d'aboutir. En regardant les réseaux produits, il est visible qu'en effet, ils sont proches d'un réseau social. Nonobstant cela, quelques problèmes persistent par rapport à la distribution de degré et aux distances sur le graphe. Ces deux mesures sont, en effet, beaucoup influencées par la spatialité même du modèle.

Pour arriver à la création du modèle énergéico-spatial, les mesures de la structure d'un réseau, la structure des réseaux sociaux et de l'espace utilisé ont été exposés dans les premiers deux chapitres. Cette étape était fondamentale pour la compréhension du reste du travail. Dans un deuxième temps, le modèle classique de réseaux spatiaux aléatoires et un petit changement de ce modèle ont été évoqués. Ces deux modèles, bien qu'ils sont éloignés de ce qu'est un réseau social, sont importants pour comprendre la spatialité d'un modèle de réseau. En effet, ils donnent des idées sur l'utilisation de règles spatiales pour la création d'un réseau.

L'énergie comme facteur limitant la connexion des nœuds est née de la réflexion sur ces modèles classiques. Ensuite, ont été présentés des modèles qui utilisent cette nouvelle idée plutôt que le rayon comme facteur limitant la connexion des nœuds ont été présentés. L'utilisation de l'énergie pour cette tâche a un sens si les nœuds sont pensés comme acteurs qui veulent tisser des liens et que ces derniers ont besoin une certaine énergie pour braver l'espace. En effet, un modèle spatial dans lequel il n'y a pas de cout à l'utilisation de l'espace ne semble pas faire beaucoup de sens. Nonobstant l'utilisation de l'énergie comme facteur limitant la création d'arêtes ces

modèles ne sont pas encore des modèles de réseaux sociaux, et aux nœuds l'arête la plus courte est toujours imposée comme la prochaine connexion qu'il doit faire, leur énergie le permettant. Finalement, le problème des distances trop longues au sein du réseau et un clustering très important a eu comme effet l'application d'une solution inspirée du modèle de Watts et Strogatz. Donc une partie aléatoire dans la création des liens a été ajoutée au modèle. Ce nouveau modèle a été appelé énergéto-spatial.

L'avantage du modèle énergéto-spatial par rapport aux modèles montrés en début du travail est surtout lié à la diminution des distances dans le réseau obtenu, en parallèle avec celle du clustering qui malgré cela demeure comparable à celui de certains réseaux sociaux.

En outre, les idées derrière le modèle sont aussi plus proches de la réalité. En effet, le modèle d'acteurs ayant une énergie et une vision ont été utilisés par d'auteurs modèles expliquant des phénomènes sociétaux, notamment pour en nommer un connu : Shugarscape¹. Ce dernier modèle ne crée pas en soi des réseaux, mais des sociétés virtuelles, son but étant de montrer des phénomènes qui sont observables en société, par exemple la distribution de la richesse. Il reste que les nœuds utilisés par le modèle énergéto-spatial ont été inspirés par les agents retournés dans Shugarscape. Et il est possible de penser d'intégrer ce modèle de formation de réseaux dans des modèles de sociétés créés en se basant sur Shugarscape, mais ceci dépasserait de loin le cadre de ce travail.

Pour retourner dans ce cadre l'idée de spatialité du modèle est aussi très intéressante pour modéliser un réseau social. Pour la simple raison que la spatialité du modèle représente un environnement pour les nœuds. L'espace dans ce travail a été défini physiquement, mais le modèle étant un modèle cette idée est une simple métaphore, et peut être adapté à d'autres idées d'espace et de distances. Si par exemple cet espace est plutôt pensé comme espace culturel, la distance des points représenterait par exemple la distance entre idées que les acteurs ont, ce qui peut être vu aussi comme facteur discriminant dans le choix de relations préférentielles dans une société et l'énergie l'effort pour comprendre l'autre. La spatialité est donc centrale dans ce modèle et la façon de la penser donne des interprétations différentes à ces

1. [15]

résultats.

Un développement intéressant pourrait aussi être d'augmenter les dimensions du modèle en adaptent l'une ou l'autre théorie sociale pour créer des espaces supplémentaires. En tout cas, les possibilités d'adaptation et changement du modèle sont grandes, comme cela a été aussi montrée dans le chapitre précédent cette conclusion. Cet état de fait est important, parce qu'un modèle qui ne peut être modifié n'est pas par définition adaptable et ne peut donc corriger des faiblesses qui deviennent évidentes quand il est appliqué à la réalité.

Bibliographie

- [1] William Aiello, Fan Chung, and Linyuan Lu. A random graph model for massive graphs. In *Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '00, pages 171–180, New York, NY, USA, 2000. ACM.
- [2] William Aiello, R. K. Chung Fan, and Linyuan Lu. Random evolution in massive graphs. In *FOCS*, pages 510–519, 2001.
- [3] R. Albert and A.-L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 74 :47–97, jan 2002.
- [4] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439) :509–512, 1999.
- [5] M. Barthélemy. Spatial networks. *Physics Reports*., 499 :1–101, February 2011.
- [6] P. S. Bearman, J. Moody, and K. Stovel. Chains of affection : the structure of Adolescent Romantic and Sexual Networks. *American Journal of Sociology*, 110 :44–91, 2004.
- [7] Vincent D Blondel, Jean-Loup Guillaume, Renaud Lambiotte, and Etienne Lefebvre. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2008(10) :P10008, 2008.
- [8] Marián Boguñé, Romualdo Pastor-Satorras, Albert Díaz-Guilera, and Alex Arenas. Models of social networks based on social distance attachment. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 70(5 Pt 2) :056122, 2004.
- [9] Ulrik Brandes. A faster algorithm for betweenness centrality. *Journal of Mathematical Sociology*, 25 :163–177, 2001.

- [10] Val Burris and Clifford L Staples. The small world of the global corporate elite. *International Sociological Association Barcelona Spain 2008*, 2008.
- [11] Jesper Dall and Michael Christensen. Random geometric graphs. *Physics Review E*, 66 :016121, Jul 2002.
- [12] Rodrigo De Castro and Jerrold W Grossman. Famous trails to paul erdős. *The Mathematical Intelligencer*, 21(3) :51–53, 1999.
- [13] I.A. Doherty, N.S. Padian, C. Marlow, and S.O. Aral. Determinants and consequences of sexual networks as they affect the spread of sexually transmitted infections. *Journal of Infectious Diseases*, 191(S1) :42–54, 2005.
- [14] H. Ebel, L.-I. Mielsch, and S. Bornholdt. Scale-free topology of e-mail networks. Technical report, University of Kiel, February 2002.
- [15] J.M. Epstein, R. Axtell, and 2050 Project. *Growing Artificial Societies : Social Science from the Bottom Up*. Complex Adaptive Systems. Brookings Institution Press, 1996.
- [16] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs, i. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 6 :290–297, 1959.
- [17] S. Fortunato. Community detection in graphs. *Physics Reports*, 486(3-5) :75–174, 2010.
- [18] J. W. Grossman and P. D. F. Ion. On a portion of the well known collaboration graph. *Congressus Numerantium*, 108 :129–131, 1995.
- [19] Bruce W. Herr, Weimao Ke, Elisha Hardy, and Katy Borner. Movies and actors : Mapping the internet movie database. *Information Visualisation, International Conference on*, 0 :465–469, 2007.
- [20] F. Liljeros, C.R. Edling, L.A.N. Amaral, H.E. Stanley, and Y. Aberg. The web of human sexual contacts. *Nature*, 411(6840) :907–908, 2001.
- [21] M. E. J. Newman. Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results. *Physical Review E*, 64(1) :016131+, jun 2001.
- [22] M. E. J. Newman. The structure of scientific collaboration networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 98(2) :404–409, 2001.
- [23] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45(2) :pp. 167–256, 2003.

- [24] M. E. J. Newman, Stephanie Forrest, and Justin Balthrop. Email networks and the spread of computer viruses. *Physical Review E*, 66(3) :035101+, 2002.
- [25] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E*, 64 :026118, Jul 2001.
- [26] Jeffrey Travers and Stanley Milgram. An experimental study of the small world problem. *Sociometry*, 32(4) :425–443, dec 1969.
- [27] Wladimir Velminski. *Leonhard Euler. Die Geburt der Graphentheorie*. Kulturverlag Kadmos, 2008.
- [28] D J Watts and S H Strogatz. Collective dynamics of "small-world" networks. *Nature*, 393(6684) :440–442, 1998.
- [29] Ling Heng Wong, Philippa Pattison, and Garry Robins. A spatial model for social networks. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 360(1) :99–120, 2005.

Annexe

Vu la taille des fichiers utilisés pour faire ce travail et le fait que l'impression de ces fichiers les renterait non lisibles, et le fait que les sources d'un programme ne sont pas compilables ni exécutables depuis une page en papier, la décision a été prise de tout mettre sur un CD. Dans le CD, qui se trouve ci-dessous, sont contenues :

- Les sources du programme JAVA utilisées.
- Les fichiers R utilisés pour créer les graphiques.
- Les fichiers bash pour sortir des informations des fichiers graphml.
- Les modèles créés pour déterminer les meilleurs paramètres pour le modèle énergétique-spatial.

Matériel informatique

Les modèles ont été tous produits sur un ordinateur Toshiba Satellite L555. Les caractéristiques de la machine sont les suivantes :

- Système d'exploitation : Archlinux Gnu/Linux
- Processeur : 2x Intel(R) Core(TM) i5 CPU M 430, 2.27GHz, 64bit
- Mémoire Vive : 2x 4Gb, DDR3, 1067 MHz

Résumé

Dans ce mémoire la création d'un modèle spatial de réseau social est abordée. Dans un premier temps, le modèle classique de réseaux aléatoires spatiaux est présenté. Dans ce modèle un rayon limite la distance physique de connexion. Un modèle similaire avec un rayon normalement distribué est discuté pour dans un deuxième temps remplacer le rayon par l'utilisation de l'énergie. Cette énergie est définie propre aux nœuds et créer un lien demande de l'énergie des deux nœuds qui veulent être connectés. Ce modèle ne se différencie pas beaucoup des modèles de réseaux aléatoires classiques dans les réseaux qu'il produit si ce n'est par la création de liens physiquement plus longs. Finalement, une idée inspirée du modèle des petits mondes de Watts Strogatz est appliquée à la création des liens, par l'ajout d'un choix aléatoire. Ce dernier modèle s'approche plus d'un modèle spatial de réseau social et est appelé modèle énergético-spatial.