

## Zur Konvergenz eines Lösungsverfahrens für ein Risikomodell mit gammaverteilten Schäden\*

### 1 Einleitung

In der Risikotheorie gibt es eine Vielzahl von entwickelten Modellen und mathematischen Methoden; ein guter Überblick findet sich in [Ger 79] und [Bühl 70] sowie, mit besonderem Schwerpunkt auf der Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Ruin, in [Tho 82].

Wir betrachten im folgenden den Risikoprozess  $S_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  für den Fall eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit unabhängigen Einzelschadenshöhen mit Verteilungsfunktion  $F$ . Dabei bezeichne  $x$  das Anfangskapital und  $c$  die Prämienrate, wobei  $c > \lambda \int_0^\infty y dF(y)$  gelten muss, damit die Überlebenswahrscheinlichkeit positiv ist. Weiters gebe es eine lineare Dividendenschranke  $b + at$ , d.h. falls das Kapital die Barriere  $b + at$  erreicht, werden Dividenden ausbezahlt und das Kapital bleibt auf der Barriere, bis der nächste Schaden auftritt ( $0 < a < c$ ,  $b \geq 0$ ).

Für Modelle mit horizontalen Dividendenschranken wurden in [DiGr 84] für beliebige Verteilungen der Einzelschadenshöhen numerische Approximationen gefunden und im Falle von linearen Dividendenschranken erhält man obere Schranken für die Ruinwahrscheinlichkeit mit geeigneten Martingalmethoden (siehe [Ger 73]).

Sind die Schadenshöhen exponentialverteilt, so läßt sich, wie in [Ger 81] gezeigt wurde, eine exakte und explizite Lösung für die Überlebenswahrscheinlichkeit  $U(x, b)$  mithilfe einer Darstellung von  $U(x, b)$  als Reihe finden. Weiters wurde ein algorithmisches Lösungsverfahren für die Ermittlung der Koeffizienten dieser Reihe entwickelt und schließlich konnte die Konvergenz dieser Reihe bewiesen werden. In der Arbeit [SiTi 96] dieser Zeitschrift wurde dieser Ansatz dann auf Risikomodelle mit Gamma( $\alpha, \beta$ )-verteilten Einzelschadenshöhen mit ganzzahligem Parameter  $\alpha > 0$  verallgemeinert ( $\beta \in \mathbb{R}^+$ ) und ein analoges algorithmisches Lösungsverfahren mit einer solchen Reihenkonstruktion vorgestellt. Dabei wurde aber auf die Frage nach der Konvergenz dieser Reihe und somit dieses Verfahrens nicht eingegangen, sondern nur darauf hingewiesen, dass Simulationen nahelegen, dass dieses Verfahren nach der Berechnung von rund 100 Termen in der Reihenentwicklung die exakte Lösung  $U(x, b)$  hinreichend genau liefert. Obwohl zahlreiche Simulationen eindeutig darauf hinweisen, dass dieses verallgemeinerte Lösungsverfahren (mitunter recht rasch) konvergiert, liegt also kein formaler Beweis für dessen Konvergenz vor.

Für ein beliebiges  $\alpha \in \mathbb{N}$  stellt sich die Antwort auf die Frage nach der Konvergenz als schwierig und vor allem extrem aufwendig heraus. Wir werden deshalb in der vorliegenden Arbeit exemplarisch für  $\alpha = 2$  als einfachsten Vertreter dieser allgemeineren Klasse von Schadenshöhenverteilungen beweisen, dass das in [SiTi 96] entwickelte Lösungsverfahren auch wirklich konvergiert und somit die exakte Lösung  $U(x, b)$  explizit liefert.

---

\*Die Autoren wurden durch das Projekt 12005-MAT des Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung unterstützt.

## 2 Das Verfahren

Es seien also im folgenden die voneinander unabhängigen Einzelschadenshöhen  $X_i$  gemäß der Verteilungsfunktion

$$F(y) = \int_0^y \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{z}{\beta}} dz \quad (\alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{R}^+) \quad (1)$$

verteilt und es bezeichne  $\lambda > 0$  den Erwartungswert der exponentialverteilten Zwischenschadenszeiten. Weiters sei  $c$  die konstante Intensität der Prämienzahlungen, wobei  $c > \lambda \mathbb{E}(X_i) = \alpha\beta\lambda$ . Die Überlebenswahrscheinlichkeit  $U(x, b)$  einer Versicherung in diesem Risikomodell ist dann, unter Einbeziehung einer linearen Dividendenschranke  $b + at$ , die Lösung der Gleichung

$$cU_x(x, b) + aU_b(x, b) - \lambda U(x, b) + \lambda \int_0^x U(x-y, b) dF(y) = 0 \quad (2)$$

unter den Nebenbedingungen

$$U_x(b, b) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} U(x, b) = U(x), \quad (3)$$

wobei  $U(x)$  die Überlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital  $x$  in Abwesenheit der Dividendenschranke bezeichnet (vgl. [Ger81]). Ist  $F$  von der Form (1), so läßt sich, wie in [SiTi 96] vorgeschlagen wird, die Lösung von (2) unter (3) in der Form

$$U(x, b) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{s^{(k)}b} \sum_{i=1}^{\alpha+1} [A_{i,k} e^{r_i^{(k)}x}] \quad (4)$$

darstellen, wobei die Exponenten und Koeffizienten nach folgendem Algorithmus bestimmt werden:

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  sind die Koeffizienten  $r_i^{(k)}$  die  $\alpha + 1$  Lösungen der folgenden Gleichung in  $R$ :

$$cR(\beta R + 1)^\alpha + aS(\beta R + 1)^\alpha - \lambda(\beta R + 1)^\alpha + \lambda = 0, \quad (5)$$

wobei  $S = s^{(k)}$  gilt.

Die Koeffizienten  $A_{i,k}$  sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{\alpha+1} \frac{A_{i,k}}{(1 + \beta r_i^{(k)})^j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, \alpha. \quad (6)$$

Um die zweite Nebenbedingung in (3) zu erfüllen, wird  $s^{(0)}$  gleich Null gesetzt, womit auch  $r_1^{(0)} = 0$  gilt. Das Polynom (5) hat genau  $\alpha + 1$  (möglicherweise komplexe) Nullstellen,

somit sind die Exponenten eindeutig bestimmt. Um der ersten Nebenbedingung in (3) zu genügen, wird für ein beliebiges  $k$  für jeden Summanden  $A_{j,k}e^{s^{(k)}b}e^{r_j^{(k)}x}$  ( $j = 2, \dots, \alpha+1$ ), dessen Ableitung nach  $x$  in  $(b, b)$  ungleich 0 ist, ein Term eingeführt, sodass die Summe beider Terme Null ergibt. Wenn also die Ableitung des  $j$ -ten Summanden des  $k$ -ten Termes  $\neq 0$  ist, so suchen wir ein noch nicht besetztes  $k' > k$  und setzen, um Auslöschung für alle  $b$  zu erreichen,

$$r_1^{(k')} + s^{(k')} = r_j^{(k)} + s^{(k)}, \quad (7)$$

woraus sich mit der Bestimmungsgleichung (5) für  $R$  der Exponent  $s^{(k')}$  ergibt. Dafür wird jene Lösung der Gleichung verwendet, für die der Realteil  $\mathcal{R}(S) < 0$  minimal wird (ob eine solche Lösung mit negativem Realteil immer existiert, muss aber erst untersucht werden und blieb in [SiTi 96] unbehandelt). Dieses  $S = s^{(k')}$  wird dann wieder in (5) eingesetzt und nun sind die  $\alpha + 1$  (möglicherweise komplexen) Nullstellen des Polynoms (5) die Exponenten  $r_i^{(k')}$  ( $i = 1, \dots, \alpha + 1$ ). Weiters wird

$$A_{1,k'}r_1^{(k')} = -A_{j,k}r_j^{(k)} \quad (8)$$

gesetzt, um die Terme, die nun gleiche Exponenten in  $(b, b)$  haben, in Summe zu eliminieren. Ausgehend von  $A_{1,0} = 1$  (was sich durch Vergleich mit der bekannten Lösung  $U(x)$  ergibt) können nun aus (6) und (8) die Koeffizienten  $A_{i,k}$  ( $i = 1, \dots, \alpha + 1$ ) als Lösung eines linearen Gleichungssystems mit  $\alpha + 1$  Unbekannten eindeutig bestimmt werden (da die zugehörige Matrix, wie sich zeigen läßt, vollen Rang hat).

Auf diese Weise werden in jeder Stufe  $k$  also  $\alpha$  neue Stufen  $k'$  mit ihren "Anfangswerten" versehen und somit eindeutig bestimmt.

### 3 Beweis der Konvergenz dieses Verfahrens für $\alpha = 2$

Wir zeigen nun, dass das in Abschnitt 2 erläuterte Verfahren für  $\alpha = 2$  konvergiert. In diesem Fall ist also

$$U(x, b) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{s^{(k)}b} \left[ A_{1,k}e^{r_1^{(k)}x} + A_{2,k}e^{r_2^{(k)}x} + A_{3,k}e^{r_3^{(k)}x} \right], \quad (9)$$

und die Bestimmungsgleichungen (5) und (6) reduzieren sich entsprechend zu

$$cR(\beta R + 1)^2 + aS(\beta R + 1)^2 - \lambda(\beta R + 1)^2 + \lambda = 0, \quad (10)$$

bzw.

$$\frac{A_{1,k}}{(1 + \beta r_1^{(k)})^j} + \frac{A_{2,k}}{(1 + \beta r_2^{(k)})^j} + \frac{A_{3,k}}{(1 + \beta r_3^{(k)})^j} = 0, \quad (j = 1, 2). \quad (11)$$

Dazu beweisen wir zunächst einige Eigenschaften der Koeffizienten mittels vollständiger Induktion:

**Lemma 1.** Für alle  $k \geq 0$  gilt:

$$r_i^{(k)}, s^{(k)} \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (12)$$

$$r_1^{(k)} \geq 0, \quad (13)$$

$$s^{(k)} \leq 0, \quad (14)$$

$$-\frac{1}{\beta} - \sqrt[3]{\frac{\lambda}{4\beta^2(c-a)}} < r_2^{(k)} < -\frac{1}{\beta}, \quad (15)$$

$$\text{und } -\frac{1}{\beta} < r_3^{(k)} < 0. \quad (16)$$

Weiters gilt  $s^{(k')} < s^{(k)} \leq 0$ ,  $r_3^{(k')} < r_3^{(k)}$  sowie  $r_2^{(k')} > r_2^{(k)}$ ,  $r_1^{(k')} > r_1^{(k)}$  und  $(s^{(k')} + r_1^{(k')}) < (s^{(k)} + r_1^{(k)}) < 0$ , d.h. innerhalb einer "Bildungskette" im Algorithmus handelt es sich um monotone Folgen und es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s^{(k)} = -\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_1^{(k)} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_{2,3}^{(k)} = -\frac{1}{\beta}. \quad (17)$$

**Beweis:** Jede Bildungskette im Algorithmus hat ihren Ursprung in der 0-ten Stufe und wir können darum für ein beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  die obigen Eigenschaften beweisen, indem wir eine vollständige Induktion innerhalb der entsprechenden Kette führen:

1) Induktionsanfang: Für  $k = 0$  gilt per definitionem  $s^{(0)} = 0$  und somit ist  $r_1^{(0)} = 0$  eine Lösung von (10). Die restlichen Lösungen ergeben sich dann zu

$$r_{2,3}^{(0)} = -\frac{1}{\beta} + \frac{\lambda\beta \pm \sqrt{\lambda^2\beta^2 + 4\lambda\beta c}}{2c\beta} \quad (18)$$

und sind somit reell. Weiters sind sie genau dann beide negativ, wenn  $c > 2\lambda\beta$ , was unserer vorausgesetzten vernünftigen Prämiumpolitik entspricht.

Betrachten wir weiters ausgehend von (10) das Polynom

$$p_0(R) = cR(\beta R + 1)^2 - \lambda(\beta R + 1)^2 + \lambda, \quad (19)$$

so ist (wegen  $r_1^{(0)} = 0$ )  $p_0(0) = 0$  und  $p_0'(0) = c - 2\lambda\beta > 0$ . Da aber  $p_0(-\frac{1}{\beta}) = \lambda > 0$ , muss eine weitere Nullstelle im Intervall  $(-\frac{1}{\beta}, 0)$  existieren, die wir mit  $r_3^{(0)}$  bezeichnen. Für  $R \rightarrow -\infty$  geht  $p_0(R)$  gegen  $-\infty$  und somit gilt  $r_2^{(0)} < -\frac{1}{\beta}$ . Um nun zu zeigen, dass

$r_2^{(0)}$  im Intervall (15) liegt, muss also  $p_0 \left( -\frac{1}{\beta} - \sqrt[3]{\frac{\lambda}{4\beta^2(c-a)}} \right) < 0$  gelten. Dies führt auf die Bedingung

$$\frac{c}{4(c-a)} + \left( \frac{c}{\lambda\beta} + 1 \right) \sqrt[3]{\frac{\lambda^2\beta^2}{16(c-a)^2}} > 1. \quad (20)$$

Um ihre Gültigkeit zu beweisen, setzen wir  $c-a := x\lambda\beta$  (mit einem festen  $x > 0$ ) in (20) ein und erhalten

$$c > \lambda\beta \frac{4x - \sqrt[3]{4x}}{1 + \sqrt[3]{4x}}. \quad (21)$$

Wegen  $a > 0$  gilt  $c > x\lambda\beta$  und somit gilt (20) genau dann, wenn für alle  $x > 0$

$$\frac{4x - \sqrt[3]{4x}}{1 + \sqrt[3]{4x}} \leq x$$

erfüllt ist, was eine Kurvendiskussion dieser Funktion bestätigt.

2) Induktionsannahme: obiges gelte für  $k$

3) Induktionsschritt:  $k \rightarrow k'$

Die Stufe  $k'$  bildet sich aus  $r_j^{(k)}$ , wobei  $j = 2$  oder  $j = 3$ .  $j$  sei also im folgenden o.B.d.A. fest gewählt. Wir zeigen sukzessive:

a)  $s^{(k')} \in \mathbb{R}$ : Setzen wir  $R := r_j^{(k)} + s^{(k)} - S$  in (10), so bestimmt sich wegen (7)  $s^{(k')}$  als eine der drei Lösungen in  $S$  (nämlich jene mit kleinstem Realteil) der kubischen Gleichung

$$\begin{aligned} & (a-c)\beta^2 S^3 + ((c(r_j^{(k)} + s^{(k)}) - \lambda)\beta^2 - 2(a-c)(\beta(r_j^{(k)} + s^{(k)}) + 1)\beta) S^2 \\ & + (-2(c(r_j^{(k)} + s^{(k)}) - \lambda)(\beta(r_j^{(k)} + s^{(k)}) + 1)\beta + (a-c)(\beta(r_j^{(k)} + s^{(k)}) + 1)^2) S \\ & + (c(r_j^{(k)} + s^{(k)}) - \lambda)(\beta(r_j^{(k)} + s^{(k)}) + 1)^2 + \lambda = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Eine weitere der drei Lösungen dieser kubischen Gleichung ist aber das schon bekannte  $s^{(k)}$ , denn (22) liefert ja alle  $S$ , für die gilt, dass  $R+S = r_j^{(k)} + s^{(k)}$  ist. Wir können also die Lösung  $s^{(k)}$  mittels Polynomdivision in (22) wegdividieren und erhalten eine quadratische Gleichung in  $S$ . In dieser kann nun wegen (10)  $s^{(k)}$  durch

$$s^{(k)} = -\frac{\lambda}{(\beta r_i^{(k)} + 1)^2 a} + \frac{\lambda}{a} - \frac{c r_i^{(k)}}{a} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (23)$$

mit  $i = j$  ersetzt werden. Im folgenden sei  $r_j^{(k)}$  durch  $r_j$  abgekürzt. Insgesamt ist also  $s^{(k')}$

eine der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned}
& (2\beta\lambda a^2 + 20r_j^3 a^2 \beta^4 \lambda + 20a^2 \beta^3 r_j^2 \lambda + 10a^2 \beta^2 r_j \lambda + 5\beta^4 \lambda^2 a r_j^2 + 2r_j \beta^3 \lambda^2 a \\
& - 29\beta^4 \lambda a c r_j^3 - 20\beta^3 \lambda a c r_j^2 - 5\beta^2 \lambda a c r_j + 26r_j^4 a \beta^4 c^2 - 3r_j^6 a^2 \beta^6 c \\
& - 16r_j^5 a^2 \beta^5 c + 2r_j^5 a^2 \beta^6 \lambda + 10r_j^4 a^2 \beta^5 \lambda - 35r_j^4 a^2 \beta^4 c + 3r_j^6 a \beta^6 c^2 \\
& + 14r_j^5 a \beta^5 c^2 - 40r_j^3 a^2 \beta^3 c + 24a \beta^3 r_j^3 c^2 + a^3 + r_j^6 a^3 \beta^6 + 6r_j^5 a^3 \beta^5 \\
& + 15r_j^4 a^3 \beta^4 + 20r_j^3 a^3 \beta^3 + 15a^3 \beta^2 r_j^2 + 6a^3 \beta r_j - 6c^3 r_j^4 \beta^4 - c^3 r_j^6 \beta^6 \\
& - 4c^3 r_j^5 \beta^5 - 4c^3 r_j^3 \beta^3 - c^3 \beta^2 r_j^2 - c a^2 - 4r_j^5 a \beta^6 c \lambda - 18r_j^4 a \beta^5 c \lambda \\
& - 25a^2 \beta^2 r_j^2 c + 11a \beta^2 r_j^2 c^2 - 8a^2 \beta r_j c + 10\lambda \beta^4 r_j^3 c^2 - \lambda^2 \beta^6 r_j^4 c \\
& - 4\lambda^2 \beta^5 r_j^3 c + \lambda^2 \beta^6 r_j^4 a + 4\lambda^2 \beta^5 r_j^3 a + 2\lambda \beta^6 r_j^5 c^2 + 8\lambda \beta^5 r_j^4 c^2 \\
& - 4\lambda^2 \beta^4 r_j^2 c + 4\lambda \beta^3 r_j^2 c^2 + 2c^2 \beta r_j a) / ((\beta r_j + 1)^4 a^2) - \beta(2\beta c^2 r_j \\
& - 4c r_j^3 a \beta^3 - 10c r_j^2 a \beta^2 - 2c \lambda \beta^3 r_j^2 - 4c \lambda \beta^2 r_j + 2\lambda a \beta^3 r_j^2 + 4\lambda a \beta^2 r_j \\
& - 8\beta c r_j a + \beta \lambda a + 2c^2 r_j^3 \beta^3 + 4c^2 r_j^2 \beta^2 + 2r_j^3 a^2 \beta^3 + 6a^2 \beta^2 r_j^2 + 6a^2 \beta r_j \\
& - 2ca + 2a^2) S / ((\beta r_j + 1)^2 a) + (a - c) \beta^2 S^2 = 0. \tag{24}
\end{aligned}$$

Die beiden Lösungen dieser Gleichung sind genau dann reell, wenn die Diskriminante

$$\begin{aligned}
& \beta^2 \lambda^2 a^2 - 4\beta \lambda a^3 + 12\lambda a^2 \beta^3 r_j^2 c + 4c r_j^3 a^2 \beta^4 \lambda - 4r_j^3 a^3 \beta^4 \lambda \\
& - 12\lambda a^3 \beta^3 r_j^2 - 12\lambda a^3 \beta^2 r_j + 12c \lambda \beta^2 r_j a^2 + 4\beta \lambda a^2 c > 0 \tag{25}
\end{aligned}$$

ist, was sich auf folgende Bedingung reduzieren läßt:

$$4(a - c)(\beta r_j + 1)^3 - \beta \lambda < 0 \tag{26}$$

bzw.

$$r_j > -\frac{1}{\beta} - \sqrt[3]{\frac{\lambda}{4\beta^2(c - a)}}; \tag{27}$$

dies ist aber laut Induktionsannahme für  $j = 2, 3$  erfüllt.

Anmerkung: Bedingung (27) ist die bestmögliche bzw. exakte Schranke für  $r_j$ , um die Reellheit von  $s^{(k')}$  zu erreichen.

b)  $r_1^{(k')} \in \mathbb{R}$ : Da  $r_1^{(k')} = r_j^{(k)} + s^{(k)} - s^{(k')}$ , ist also wegen der Induktionsannahme auch  $r_1^{(k')}$  reell.

c)  $r_1^{(k')} \geq 0$ : Betrachten wir nochmals Gleichung (10) und ersetzen diesmal  $S$  durch  $r_j^{(k)} + s^{(k)} - R$ , so erhalten wir die kubische Gleichung in  $R$

$$\begin{aligned}
& (c - a) \beta^2 R^3 + \left( a \beta^2 (r_j^{(k)} + s^{(k)}) - \lambda \beta^2 + 2(c - a) \beta \right) R^2 \\
& + \left( 2a \beta (r_j^{(k)} + s^{(k)}) - 2\lambda \beta + c - a \right) R + a \left( r_j^{(k)} + s^{(k)} \right) = 0 \tag{28}
\end{aligned}$$

wobei zwei der drei Lösungen  $r_j^{(k)}$  und  $r_1^{(k')}$  sind. Somit muss auch die dritte (für den Algorithmus letztendlich irrelevante) Lösung  $r_u$  reell sein und man erhält nach dem Vieta'schen Satz aus (28)

$$r_1^{(k')} r_j^{(k)} r_u = -\frac{a(r_j^{(k)} + s^{(k)})}{(c-a)\beta^2}. \quad (29)$$

Der rechte Term und  $r_j^{(k)}$  sind aber nach Induktionsannahme positiv bzw. negativ, somit muss das Produkt  $r_1^{(k')} r_u$  negativ sein. Da  $s^{(k')}$  die kleinere Lösung von (24) war, ist das zugehörige  $r_1^{(k')}$  der größere Multiplikant des obigen Produktes und also positiv.

d)  $s^{(k')} < s^{(k)} \leq 0$ : Wegen  $s^{(k')} = r_j^{(k)} - r_1^{(k')} + s^{(k)}$  und der Negativität von  $r_j^{(k)}$  bzw. der Positivität von  $r_1^{(k')}$  ist also (mit  $s^{(0)} = 0$ )  $s^{(k')} < s^{(k)} \leq 0$ .

e)  $r_{2,3}^{(k')} \in \mathbb{R}$ : Um die beiden restlichen Exponenten der Stufe  $(k')$  zu untersuchen, können wir die nunmehr schon bekannte reelle, positive Lösung  $r_1^{(k')}$  aus der kubischen Gleichung in  $R$

$$cR(\beta R + 1)^2 + as^{(k')}(\beta R + 1)^2 - \lambda(\beta R + 1)^2 + \lambda = 0$$

wegdividieren und erhalten, wenn wir für  $s^{(k')}$

$$s^{(k')} = -\frac{\lambda}{(\beta r_1^{(k')} + 1)^2 a} + \frac{\lambda}{a} - \frac{c r_1^{(k')}}{a}$$

einsetzen, die quadratische (bemerkenswerterweise von  $a$  unabhängige) Gleichung in  $R$

$$\begin{aligned} c\beta^2 R^2 + \frac{\beta(4c r_1^{(k')} \beta - \beta \lambda + 2c + 2c r_1^{(k')^2} \beta^2) R}{(\beta r_1^{(k')} + 1)^2} \\ + \frac{c r_1^{(k')^2} \beta^2 - \lambda \beta^2 r_1^{(k')} - 2\beta \lambda + 2c r_1^{(k')} \beta + c}{(\beta r_1^{(k')} + 1)^2} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Diese liefert genau dann zwei reelle Lösungen  $r_{2,3}^{(k')}$ , wenn die Diskriminante

$$D = 12c r_1^{(k')} \beta^2 \lambda + \beta^2 \lambda^2 + 4\beta \lambda c + 12c r_1^{(k')^2} \beta^3 \lambda + 4c r_1^{(k')^3} \beta^4 \lambda$$

positiv ist. Wegen der bereits gezeigten Positivität von  $r_1^{(k')}$  sowie aller restlichen auftretenden Parameter ist diese Bedingung aber erfüllt, also sind auch  $r_2^{(k')}$  und  $r_3^{(k')}$  reell.

f)  $r_2^{(k')} < -\frac{1}{\beta}$  bzw.  $-\frac{1}{\beta} < r_3^{(k')} < 0$ : Betrachten wir zuerst, ausgehend von (10), das kubische Polynom mit reellen Koeffizienten

$$p(R) = cR(\beta R + 1)^2 + aS(\beta R + 1)^2 - \lambda(\beta R + 1)^2 + \lambda.$$

Offensichtlich gilt  $p(0) = aS < 0$ , da  $S = s^{(k')}$  ja negativ ist. Weiters gilt  $\lim_{R \rightarrow \infty} p(R) = \infty$ , also gibt es mindestens eine positive Nullstelle von  $p(R)$ . Nun ist die Ableitung

$$p'(R) = (\beta R + 1)[2\beta cR + c(\beta R + 1) + 2aS\beta - 2\lambda\beta]$$

ein Polynom zweiten Grades mit den Nullstellen  $N_1 = -\frac{1}{\beta}$  und  $N_2 = \frac{2\lambda\beta - 2aS\beta - c}{3\beta c}$ . Da also nur eine Extremstelle positiv sein kann, gibt es genau eine positive Nullstelle von  $p(R)$  und diese muss  $r_1^{(k')}$  sein. Somit sind  $r_{2,3}^{(k')} < 0$ .

Setzt man ausgehend von (30)

$$p_1(R) := c\beta^2 R^2 + \frac{\beta(4cr_1^{(k')}\beta - \beta\lambda + 2c + 2cr_1^{(k')^2}\beta^2)R}{(\beta r_1^{(k')} + 1)^2} + \frac{-\lambda\beta^2 r_1^{(k')} - 2\beta\lambda + cr_1^{(k')^2}\beta^2 + 2cr_1^{(k')}\beta + c}{(\beta r_1^{(k')} + 1)^2},$$

so sieht man (mit  $c > 2\beta\lambda$ ), dass  $p_1(-\frac{1}{\beta}) = -\frac{\lambda\beta}{(\beta r_1^{(k')} + 1)^2} < 0$  sowie  $p_1(0) > 0$  und  $\lim_{R \rightarrow -\infty} p_1(R) = +\infty$ . Das ist aber gleichbedeutend mit

$$r_2^{(k')} < -\frac{1}{\beta} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{\beta} < r_3^{(k')} < 0.$$

g) Monotonie der  $r_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ): Betrachten wir nocheinmal Gleichung (23)

$$s^{(k)} = -\frac{\lambda}{(\beta r_i^{(k)} + 1)^2 a} + \frac{\lambda}{a} - \frac{c r_i^{(k)}}{a} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Fassen wir nun  $r_i^{(k)}$  als Funktion  $r_i^{(k)}(s^{(k)})$  auf, so können wir (23) implizit nach  $s^{(k)}$  differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial r_i^{(k)}}{\partial s^{(k)}} = \frac{a}{\frac{2\beta\lambda}{(\beta r_i^{(k)} + 1)^3} - c} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (31)$$

Wegen  $r_1^{(k)} \geq 0$  ist der Ausdruck  $(\beta r_1^{(k)} + 1)^3 \geq 1$  und somit (wegen  $c > 2\beta\lambda$ )  $\frac{\partial r_1^{(k)}}{\partial s^{(k)}} < 0$ . Da aber  $s^{(k')} < s^{(k)}$ , folgt  $r_1^{(k')} > r_1^{(k)}$ .

Wegen  $r_2^{(k)} < -\frac{1}{\beta}$  gilt  $(\beta r_2^{(k)} + 1)^3 < 0$  bzw.  $\frac{\partial r_2^{(k)}}{\partial s^{(k)}} < 0$ . Analog zu oben gilt deshalb  $r_2^{(k')} > r_2^{(k)}$  und somit ist auch  $r_2^{(k')}$  wieder im gewünschten Intervall (15).

Setzt man schließlich  $r_3^{(0)}$  aus (18) in (31) ein, so ergibt sich wegen  $c > 2\beta\lambda$  eine positive Ableitung und insgesamt mit (16) im weiteren  $r_3^{(k')} < r_3^{(k)}$  für beliebige  $k' > k$ .

Die jeweiligen Grenzwerte ergeben sich dann aus (23) wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} s^{(k)} = -\infty$ .

h)  $s^{(k')} + r_1^{(k')} < s^{(k)} + r_1^{(k)} \leq 0$ : Die Monotonie dieser Summe folgt trivialerweise aus

$$s^{(k)} + r_1^{(k)} > s^{(k)} + r_j^{(k)} = s^{(k')} + r_1^{(k')}.$$

□

Um das asymptotische Verhalten der Koeffizienten  $A_{i,k}$  zu untersuchen, betrachten wir wieder einen Schritt in einer Bildungskette ( $k \rightarrow k'$ ) und erhalten wegen (8)

$$|A_{1,k'}| = \frac{|A_{j,k}| \cdot |r_j^{(k)}|}{|r_1^{(k')}|} \leq \frac{|A_{j,k}| \cdot |K_1|}{|r_1^{(k')}|} = q_{1,k'} |A_{j,k}| \quad (32)$$

mit der Konstanten  $K_1 = -\frac{1}{\beta} - \sqrt[3]{\frac{\lambda}{4\beta^2(c-a)}}$ . Die beiden anderen Koeffizienten der Stufe  $k'$  ergeben sich dann aus dem linearen Gleichungssystem (6) zu

$$A_{2,k'} = -\frac{\beta^3 r_3 r_1 r_2^2 + 2\beta^2 r_3 r_1 r_2 + \beta^2 r_1 r_2^2 + \beta r_3 r_1 + 2\beta r_1 r_2 + r_1 + \beta^2 r_3 r_2^2 + 2\beta r_3 r_2 + r_3}{(1 + \beta r_1)(\beta^2 r_3 r_1 r_2 + \beta r_3 r_1 + \beta r_1 r_2 + \beta r_3 r_2 + r_3 + r_2)} A_{1,k'}$$

bzw.

$$A_{3,k'} = ((r_1 - r_2)A_{1,k'}) / (\beta^4 r_3^2 r_1^2 r_2 + 2\beta^3 r_3^2 r_1 r_2 + 2\beta^3 r_3 r_1^2 r_2 + \beta^3 r_3^2 r_1^2 + \beta^2 r_1^2 r_2 + 4\beta^2 r_3 r_1 r_2 + \beta^2 r_3^2 r_2 + 2\beta^2 r_3^2 r_1 + \beta^2 r_3 r_1^2 + 2\beta r_3 r_2 + 2\beta r_1 r_2 + \beta r_3^2 + 2\beta r_3 r_1 + r_3 + r_2),$$

wobei  $r_i$  für  $r_i^{(k')}$  steht. Wegen (17) gilt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_{i,k}| = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (33)$$

Nun lassen sich mit den Monotonieeigenschaften der  $r_i^{(k)}$  bzw. ihren bekannten Grenzwerten noch folgende Abschätzungen gewinnen:

$$|A_{2,k}| \leq \frac{K_2 |A_{1,k}|}{(1 + \beta r_1^{(k)})} = q_{2,k} |A_{1,k}| \quad (34)$$

bzw.

$$|A_{3,k}| \leq \frac{K_3 |A_{1,k}|}{K_4 + K_5 r_1^{(k)}} = q_{3,k} |A_{1,k}| \quad (35)$$

mit Konstanten  $K_i > 0$ . Wegen der Monotonie von  $r_1^{(k)}$  werden die  $q_{i,k}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) für hinreichend grosse  $k$  beliebig klein und es existiert beispielsweise ein  $k_1$ , sodass für alle  $k \geq k_1$  gilt:  $q_k = \max\{q_{1,k}, q_{2,k}, q_{3,k}\} < 1$ . Auf diese Weise kann die Folge  $A_{i,k_j}$  innerhalb einer Bildungskette dann mit einer geometrischen Reihe majorisiert werden.

Die absolute Konvergenz unserer Reihe (4) ergibt sich nun mit folgenden (großzügigen) Abschätzungen: Wir betrachten jede der drei Teilreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{s^{(k)}b} \left[ |A_{i,k}| e^{r_i^{(k)}x} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (36)$$

separat. Aufgrund der Ergebnisse bezüglich der Monotonie der Koeffizienten  $r_i^{(k)}$  und  $s^{(k)}$  gilt ( $0 \leq x \leq b$  sind ja fest gewählt)

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{s^{(k)}b} \left[ |A_{i,k}| e^{r_i^{(k)}x} \right] \leq C_i \sum_{k=0}^{\infty} |A_{i,k}| \quad (i = 1, 2, 3) \quad (37)$$

mit Konstanten  $C_i \geq 0$ .

Nach dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium liegt genau dann absolute Konvergenz vor, wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N_\epsilon$  existiert, sodass für alle  $n > m > N_\epsilon$   $\sum_{k=m+1}^n |A_{i,k}| < \epsilon$  gilt ( $i = 1, 2, 3$ ). Aufgrund der Struktur des Algorithmus stehen Elemente mit benachbarten Indizes nicht unbedingt in "kausalem" Zusammenhang (bezüglich der Bildung der Folgenglieder); jedoch kann die Reihe (37) in Blöcke mit  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{m-1}$  Elementen zerlegt werden; innerhalb des  $m$ -ten solchen Blockes (mit  $2^{m-1}$  Folgengliedern) gibt es dann also keine direkte Abhängigkeit zu den Koeffizienten des  $(m-2)$ -ten Blockes mehr bzw. anders ausgedrückt, erzeugen die Elemente des  $(m-1)$ -ten Blockes sämtliche Koeffizienten des  $m$ -ten Blockes. Wegen (32), (34) und (35) gilt

$$|A_{i,k}| \leq q_{e_m} |A_{1,k_{m-1}}| \quad (k = 2^{m-2}, \dots, 2^{m-1}; m \geq 3; i = 1, 2, 3)$$

wobei

$$|A_{1,k_{m-1}}| = \max_{k \in (2^{m-3}, \dots, 2^{m-2})} |A_{1,k}| \quad \text{und} \quad q_{e_m} = \max_{k \in (2^{m-2}, \dots, 2^{m-1})} q_k.$$

Mit denselben Argumenten kann man dann

$$|A_{i,k}| \leq q_{e_m}^2 |A_{1,k_{m-1}}| \quad (k = 2^{m-1}, \dots, 2^m; i = 1, 2, 3)$$

bzw. analoges für grössere  $k$  folgern und es ergibt sich insgesamt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |A_{i,k}| \leq \sum_{m=m_0}^{\infty} 2^{m-1} q_{e_{m_0}}^m |A_{1,k_{m_0-1}}| \quad (i = 1, 2, 3)$$

und dies ist für  $q_{e_{m_0}} < \frac{1}{2}$  eine geometrische Reihe. Da für hinreichend große  $k_0$  (und somit für hinreichend große  $m_0$ ) das  $q_{e_{m_0}}$  (als Funktion der  $r_1^{(k)}$ ) beliebig klein gemacht werden kann, konvergiert die Reihe (4) also gegen eine beschränkte Funktion, die auch (3) erfüllt.  $\square$

**Bemerkung:** Für  $\alpha > 2$  sind die Koeffizienten  $r_i^{(k)}$  und  $s^{(k)}$  im allgemeinen nicht mehr reell und deshalb kann die vorgestellte Beweistechnik in dieser Form nicht auf die Fälle mit  $\alpha > 2$  übertragen werden. Immerhin hat man mit dem Beweis für  $\alpha = 2$  aber die Gewißheit erlangt, dass zumindest für einen Vertreter der Klasse der allgemeineren Verteilungen, für welche das obige algorithmische Lösungsverfahren formuliert wurde, dieses auch konvergiert.

#### 4 Literatur

HANS BÜHLMANN. *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1970.

DAVID DICKSON, J. R. GRAY. Exact solutions for ruin probability in the presence of an absorbing upper barrier, *Scand. Actuarial J.*, Seiten 174-186, 1984.

HANS U. GERBER. Martingales in risk theory. *Mitteilungen der Schweizer Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, Seiten 205-216, 1973.

HANS U. GERBER. An Introduction to Mathematical Risk Theory. *Huebner Foundation, Monograph 8. Homewood, Illinois*, 1979.

HANS U. GERBER. On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier. *Scand. Actuarial J.*, Seiten 105-115, 1981.

THOMAS SIEGL, ROBERT F. TICHY. Lösungsverfahren eines Risikomodells bei exponentiell fallender Schadensverteilung. *Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung*, Heft 1, Seiten 95-118, 1996.

OLOF THORIN. Probabilities of ruin. *Scand. Actuarial J.*, Seiten 65-102, 1982.

---

Hansjörg Albrecher  
Robert F. Tichy  
Institut für Mathematik A  
Technische Universität Graz  
Steyrergasse 30  
A-8010 Graz

## Zusammenfassung

In der Arbeit von Siegl und Tichy [SiTi 96] wird die exakte Lösung für die Überlebenswahrscheinlichkeit  $U(x, b)$  eines Risikoprozesses  $S_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  mit Anfangskapital  $x$ , konstanter Prämiedichte  $c$  und linearer Dividendenschranke  $b + at$  für den Fall eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit unabhängigen Gamma( $\alpha, \beta$ )-verteilten Einzelschadenshöhen  $X_i$  (wobei  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < a < c$  und  $b > 0$ ) als Reihe dargestellt und ein Algorithmus angegeben, um die Reihenkoeffizienten zu bestimmen. Während in [Ger 81] für den speziellen Fall exponentialverteilter Schadenshöhen (also  $\alpha = 1$ ) und ein entsprechend einfacheres Lösungsverfahren die Konvergenz dieser Reihe gezeigt werden konnte, ist die Konvergenz für den allgemeineren Fall noch nicht behandelt worden.

In dieser Arbeit wird exemplarisch für  $\alpha = 2$  bewiesen, dass das Lösungsverfahren nach [SiTi 96] auch wirklich konvergiert und somit zur Ermittlung von  $U(x, b)$  angewendet werden kann.

## Résumé

Nous considérons le modèle actuariel  $S_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  en présence d'une barrière linéaire de dividendes  $b + at$ , où  $x$  est le capital initial,  $c$  l'intensité constante des primes, le nombre des sinistres possède une distribution de Poisson et les montants des sinistres  $X_i$  des distributions de Gamma( $\alpha, \beta$ ) indépendantes ( $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < a < c$  et  $b > 0$ ). Pour ce modèle, Siegl et Tichy [SiTi 96] représentent la solution exacte pour la probabilité de survie  $U(x, b)$  comme série et proposent un algorithme pour obtenir les coefficients correspondants. Dans le cas de montants de sinistres qui suivent une loi exponentielle, l'algorithme peut être simplifié et Gerber [Ger 81] a prouvé sa convergence, cependant, la convergence dans le cas général était une question ouverte.

Dans le présent travail, les auteurs prouvent la convergence de cet algorithme à la solution exacte  $U(x, b)$  pour  $\alpha = 2$  comme représentant de cette classe de distributions plus générale et justifient l'utilisation de cette méthode pour obtenir la solution exacte  $U(x, b)$ .

## Summary

We consider the classical risk process  $S_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  in the presence of a linear dividend barrier  $b + at$ , where  $x$  is the initial capital,  $c$  is the constant intensity of the continuous premium flow, the claim number variable  $N(t)$  is Poisson-distributed and the single claims  $X_i$  are independent Gamma( $\alpha, \beta$ )-distributed random variables ( $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 < a < c$  and  $b > 0$ ). For such a model Siegl and Tichy [SiTi 96] represented the exact solution for the probability of survival  $U(x, b)$  as a series and provided an algorithm for obtaining the corresponding coefficients. While in the case of an exponential claim size distribution ( $\alpha = 1$ ) this solution algorithm simplifies and Gerber [Ger 81] could prove its convergence, the convergence of this method in the general case was still an open problem. In this paper, the authors prove the convergence of this algorithm to the exact solution  $U(x, b)$  for a representative of this more general class of distributions, namely  $\alpha = 2$ , and thus justify the usage of this approach to obtain the exact solution  $U(x, b)$ .