David-Olivier Jaquet

Les horloges Rubik

Gymnase cantonal Neuchâtel

LES HORLOGES RUBIK

DESCRIPTION :

La Rubik's clock est constituée de deux faces comportant chacune neuf petits cadrans disposés en carré.

Chaque cadran contient une aiguille mobile.

Le mécanisme qui permet de bouger les aiguilles est formé de quatre roues dentées situées aux sommets du carré ainsi que de quatre pivots centraux. Chaque pivot peut être levé ou baissé par rapport à une face.

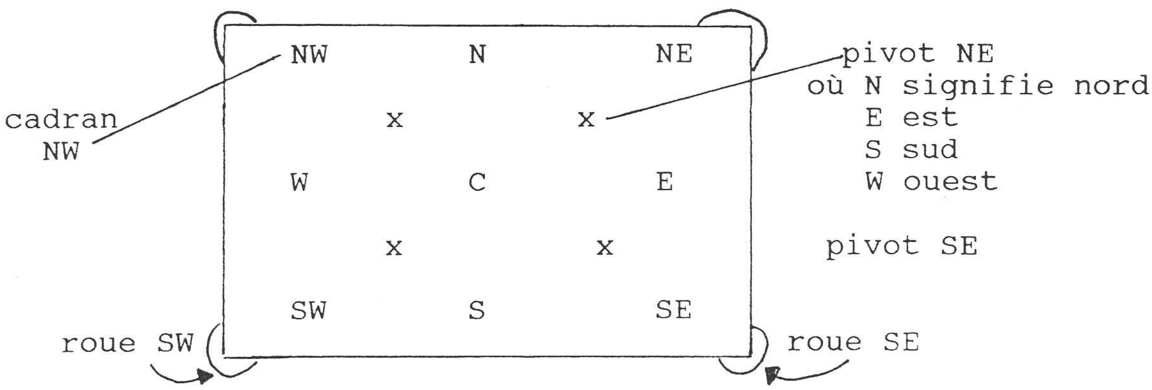
Si un pivot est levé par rapport à une face, alors il est baissé par rapport à l'autre face et réciproquement.

Considérons, du moins dans un premier temps, l'étude d'une seule face. L'autre face - la face cachée - sera momentanément oubliée, sauf mention explicite.

PROBLEME :

Lorsqu'on tourne les roues et modifie la position des pivots, les aiguilles des divers cadrans indiquent des heures quelconques. Le but est de les remettre toutes simultanément dans la position initiale, c'est-à-dire sur minuit.

TERMINOLOGIE : (afin de ne pas perdre le nord)



DEFINITIONS :

Un **mouvement** m est réalisé par la rotation d'une roue après positionnement des pivots.

Un **mouvement élémentaire** est un mouvement durant lequel une seule roue tourne.

Une **formule** est la composition successive de plusieurs mouvements.

Notre problème peut être reformulé comme suit :
Etant donné un état quelconque de la Rubik's clock (les aiguilles indiquent des heures quelconques), trouver une formule qui permette de positionner toutes les aiguilles simultanément sur minuit.

DESCRIPTION DES DIFFERENTS MOUVEMENTS POSSIBLES :

On remarquera tout d'abord que l'aiguille du cadran NW, par exemple, est fixée à la roue NW. Donc si la roue NW tourne de h heures, l'aiguille NW tournera aussi forcément de h heures. On peut faire les mêmes constations pour les aiguilles NE, SE et SW qui sont respectivement fixées aux roues NE, SE et SW.

Une conséquence directe de cette propriété est que si les aiguilles NW, NE, SE et SW d'une face marquent minuit, alors les aiguilles NW, NE, SE et SW de l'autre face indiquent aussi minuit. Plus généralement, si les aiguilles NW, NE, SE et SW d'une face marquent l'heure j, alors les aiguilles NW, NE, SE et SW de l'autre face marquent l'heure 12 -j. (Pour peu qu'on identifie 0 h avec 12 h !)

On peut donc, maintenant déjà, conclure qu'il est impossible de faire que les cadrans des deux faces soient simultanément réglés sur 1 h.

A chaque roue correspond un et un seul pivot. Si le pivot associé à la roue qu'on tourne est levé, toutes les roues dont le pivot est levé tournent en même temps.

On peut ainsi caractériser les mouvements élémentaires et les classer en deux catégories :

1) Le pivot associé à la roue qu'on tourne est levé, tous les autres sont baissés.

2) Le pivot associé à la roue qu'on tourne est baissé, tous les autres sont levés.

Lorsque dans un mouvement, plusieurs roues tournent (leurs pivots sont dans la même position), elles tournent toutes dans le même sens et à la même vitesse.

Lors d'un mouvement, les aiguilles des neuf cadrans se partagent en deux ensembles :
- ensemble des aiguilles fixes par ce mouvement,
- ensemble des aiguilles mobiles par ce mouvement.

REMARQUE ESSENTIELLE :

Lors d'un mouvement, toutes les aiguilles mobiles avancent du même nombre d'heure(s).

On peut maintenant définir une notation cohérente pour décrire un mouvement.
Un mouvement sera entièrement caractérisé par :
- la position du pivot associé à la roue qu'on tourne
- la position des quatre pivots
- le nombre d'heure(s) dont on avance.

On regroupera ces informations dans une parenthèse.

$m = \left(1, \begin{matrix} l & b \\ b & b \end{matrix}, 1 \right)$ par exemple décrira le mouvement suivant :

On tourne la roue NW d'une heure, le pivot NW étant levé et les autres baissés.

légende : l : levé)
b : baissé) positions possibles pour les pivots

Pour chaque mouvement, on pourra aussi construire une matrice qui résume le nombre d'heure(s) dont chaque aiguille avance.

Par exemple :

$$m = \left(1, \begin{matrix} l & b \\ b & b \end{matrix}, 3 \right) \longmapsto \begin{matrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Ce tableau signifie donc que les aiguilles N, W, NW, C avancent de trois heures, les autres étant fixes.

Lorsqu'on compose des mouvements, les effets s'additionnent. Si une aiguille avance de 5 heures par le premier mouvement et recule de 2 heures par le second (avance de -2 heures), au total, elle aura avancé de 5 + (-2) = 5 - 2 = 3 heures.

On peut donc additionner les tableaux composantes par composantes.

Exemple :

$$m_1 = \left(1, \begin{matrix} l & b \\ b & b \end{matrix}, 1 \right) \longmapsto \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$m_2 = \left(1, \begin{matrix} b & l \\ b & b \end{matrix}, 1 \right) \longmapsto \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Si on effectue m_1 et m_2, on obtiendra pour effet :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

On remarquera que l'ordre dans lequel on effectue ces deux mouvements n'influence pas le résultat. On notera la composition des mouvements par un + pour insister sur l'aspect commutatif de cette opération.
On a donc, et ceci quel que soient les mouvements m_1 et m_2,
$m_1 + m_2 = m_2 + m_1$.

ENUMERATION DES MOUVEMENTS (pour lesquels on avance de 1 heure)

1) 8 mouvements élémentaires :

			ensemble des aiguilles mobiles en fonction des mouvements.
1	$\left(1, \begin{matrix} 1 & b \\ b & b \end{matrix}, 1\right) \longmapsto$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	(N, W, NW, C)
2	$\left(1, \begin{matrix} b & 1 \\ b & b \end{matrix}, 1\right) \longmapsto$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	(N, E, NE, C)
3	$\left(1, \begin{matrix} b & b \\ b & 1 \end{matrix}, 1\right) \longmapsto$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$	(E, S, SE, C)
4	$\left(1, \begin{matrix} b & b \\ 1 & b \end{matrix}, 1\right) \longmapsto$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$	(S, W, SW, C)
5	$\left(b, \begin{matrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}, 1\right) \longmapsto$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	(NW)
6	$\left(b, \begin{matrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{matrix}, 1\right) \longmapsto$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	(NE)
7	$\left(b, \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{matrix}, 1\right) \longmapsto$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	(SE)
8	$\left(b, \begin{matrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{matrix}, 1\right) \longmapsto$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	(SW)

2) 22 autres mouvements :

9 $\left(1, \begin{matrix} l & l \\ l & l \end{matrix}, 1\right)$

10 $\left(1, \begin{matrix} l & l \\ b & l \end{matrix}, 1\right)$

11 $\left(1, \begin{matrix} l & l \\ l & b \end{matrix}, 1\right)$

12 $\left(1, \begin{matrix} l & b \\ l & l \end{matrix}, 1\right)$

13 $\left(1, \begin{matrix} b & l \\ l & l \end{matrix}, 1\right)$

14 $\left(1, \begin{matrix} l & l \\ b & b \end{matrix}, 1\right)$

15 $\left(1, \begin{matrix} l & b \\ b & l \end{matrix}, 1\right)$

16 $\left(1, \begin{matrix} l & b \\ l & b \end{matrix}, 1\right)$

17 $\left(1, \begin{matrix} b & l \\ b & l \end{matrix}, 1\right)$

18 $\left(1, \begin{matrix} b & l \\ l & b \end{matrix}, 1\right)$

19 $\left(1, \begin{matrix} b & b \\ l & l \end{matrix}, 1\right)$

20 $\left(b, \begin{matrix} b & b \\ b & b \end{matrix}, 1\right)$

21 $\left(b, \begin{matrix} b & b \\ l & b \end{matrix}, 1\right)$

22 $\left(b, \begin{matrix} b & b \\ b & l \end{matrix}, 1\right)$

23 $\left(b, \begin{matrix} b & l \\ b & b \end{matrix}, 1\right)$

24 $\left(b, \begin{matrix} l & b \\ b & b \end{matrix}, 1\right)$

25 $\left(b, \begin{matrix} b & b \\ l & l \end{matrix}, 1\right)$

26 $\left(b, \begin{matrix} b & l \\ l & b \end{matrix}, 1\right)$

27 $\left(b, \begin{matrix} b & l \\ b & l \end{matrix}, 1\right)$

28 $\left(b, \begin{matrix} l & b \\ l & b \end{matrix}, 1\right)$

29 $\left(b, \begin{matrix} l & b \\ b & l \end{matrix}, 1\right)$

30 $\left(b, \begin{matrix} l & l \\ b & b \end{matrix}, 1\right)$

Pour un mouvement élémentaire, l'ensemble des aiguilles mobiles sera dit ensemble élémentaire des aiguilles mobiles associé à ce mouvement.

Pour un mouvement quelconque, l'ensemble des aiguilles mobiles est réunion d'ensembles élémentaires d'aiguilles mobiles.

Plus précisément, lorsqu'on effectue un mouvement m, plusieurs roues peuvent tourner. A chaque roue qui tourne correspond un ensemble élémentaire. L'ensemble des aiguilles mobiles associé à m en est la réunion.

Donc, pour qu'une aiguille bouge lorsqu'on effectue un mouvement, il faut et il suffit qu'elle appartienne à l'ensemble élémentaire des aiguilles mobiles associé à une des roues qui tournent.

On notera, dès maintenant, M(m), l'ensemble des aiguilles mobiles associé au mouvement m.

EXEMPLE :

$$M\left(1, \begin{matrix} 1 & b \\ b & 1 \end{matrix}, 1\right) = M\left(1, \begin{matrix} 1 & b \\ b & b \end{matrix}, 1\right) \cup M\left(1, \begin{matrix} b & b \\ b & 1 \end{matrix}, 1\right) =$$

(N, W, NW, C, E, S, SE)

CAS D'UNE FORMULE SIMPLE A TROIS MOUVEMENTS :

Supposons qu'on ait trois mouvements m_1, m_2 et m_3 satisfaisant:

$$M(m_3) = M(m_1) \cup M(m_2)$$

c'est-à-dire l'ensemble des aiguilles mobiles associé à m_3 est la réunion des ensembles M (m_1) et M (m_2).

Supposons encore que les aiguilles mobiles

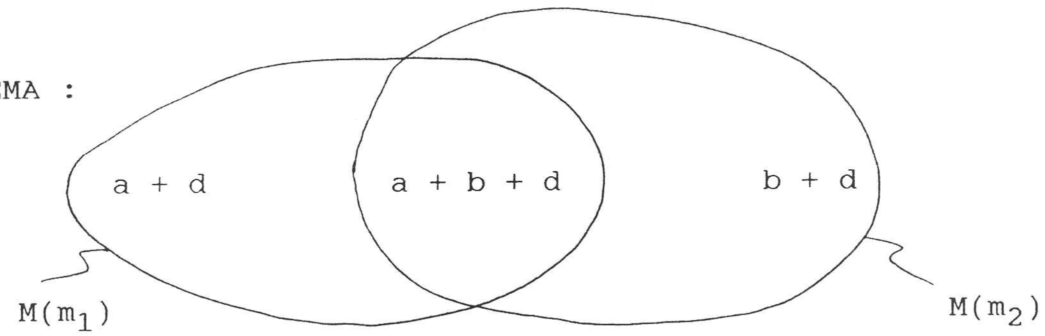
par m_1 tournent de a heure(s)

par m_2 tournent de b heure(s)

par m_3 tournent de d heure(s)

Les aiguilles qui appartiennent à $M(M_1)$ mais pas à $M(m_2)$ tourneront de a + d sous l'effet de $m_1 + m_2 + m_3$; les aiguilles qui appartiennent à $M(m_2)$ mais pas à $M(m_1)$ tourneront de b + d; finalement, celles qui appartiennent à $M(m_1)$ et $M(m_2)$ tourneront de a + b + d.

SCHEMA :



Considérons le cas particulier où a=b=h **et** d= -h on aura alors que les aiguilles qui appartiennent à $M(m_1)$ et $M(m_2)$ tourneront de h heures, toutes les autres étant fixes.

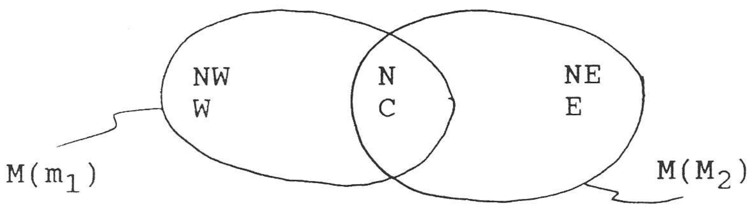
EXEMPLES INTERESSANTS :

a) $m_1 = \left(1, \begin{matrix} l & b \\ b & b \end{matrix}, h\right)$ $\qquad m_2 = \left(1, \begin{matrix} b & l \\ b & b \end{matrix}, h\right)$

$m_3 = \left(1, \begin{matrix} l & l \\ b & b \end{matrix}, -h\right)$

$M(m_1) = (N, W, NW, C) \qquad M(m_2) = (N, E, NE, C)$

Par construction de m_3, $M(m_3) = M(m_1) \cup M(m_2)$



$m_1 + m_2 + m_3$ a donc pour effet de faire avancer les aiguilles N et C de h heures, les autres étant fixes.

b) par analogie, on trouvera facilement les formules qui permettent de faire avancer de h heures :

- les aiguilles E et C
- les aiguilles S et C
- les aiguilles W et C

c) $m_1 = \left(1, \begin{matrix} l & b \\ b & b \end{matrix}, h\right)$ $\quad m_2 = \left(1, \begin{matrix} b & b \\ b & l \end{matrix}, h\right)$

$m_3 = \left(1, \begin{matrix} l & b \\ b & l \end{matrix}, -h\right)$

A nouveau, par construction de m_3, on a $M(m_3) = M(m_1) \cup M(m_2)$.

On remarquera facilement que $M(m_1) \cap M(m_2) = (C)$

Donc, sous l'effet de $m_1 + m_2 + m_3$, C avance de h heures, les autres aiguilles étant fixes.

METHODE POUR RESOUDRE LA RUBIK'S CLOCK

1) A l'aide des mouvements suivants, on peut placer les aiguilles NW, NE, SE, SW sur midi

NW : $\left(b, \begin{matrix} b & l \\ l & l \end{matrix}, h_1\right)$ $\quad$ NE : $\left(b, \begin{matrix} l & b \\ l & l \end{matrix}, h_2\right)$

SW : $\left(b, \begin{matrix} l & l \\ b & l \end{matrix}, h_3\right)$ $\quad$ SE : $\left(b, \begin{matrix} l & l \\ l & b \end{matrix}, h_4\right)$

On a déjà vu que si ces aiguilles sont à midi pour une face, elles le sont aussi pour l'autre face.

2) On va utiliser le fait suivant :
Une formule qui ne fait intervenir que des mouvements du type (b, ,) laisse fixe les aiguilles N, E, S, W et C. Donc si une formule de ce type laisse fixe en plus les aiguilles NE, SE, SW et NW, alors elle laisse fixe toute la face.
Par conséquent, une formule qui ne fait intervenir que des mouvements du type (l, ,) et qui laisse fixe les aiguilles NE, SE, SW et NW laisse fixe la face cachée.
Il suffit de remarquer maintenant que les formules a) b) et c) des pages 7 et 8 satisfont ces conditions.

3) Procédé de résolution :

(i) Par le point 1) on peut supposer que les aiguilles NE, SE, NW, SW sont à midi.

(ii) Par les formules a) et b), on peut placer l'une après l'autre les aiguilles N, E, S, W sur midi, sans modifier la face cachée.

(iii) Par la formule c), on peut placer l'aiguille C sur midi sans modifier la face cachée.

(iv) On retourne l'horloge, et on reprend les points (ii) et (iii). La première face, devenant la face cachée, n'étant pas modifiée, toutes les aiguilles marquent donc simultanément minuit.

<u>Remarque</u> : on trouvera aisément des variantes pour résoudre plus rapidement la première face.

QUELQUES REMARQUES THEORIQUES :

- les cadrans de la première face peuvent être réglés sur n'importe quelle heure indépendamment les uns des autres a les formules décrites ci-dessus.
- lorsqu'on retourne l'horloge, si on ne veut pas modifier la première face, on ne peut plus modifier les aiguilles NE, SE, NW, SW. Par contre les autres peuvent à nouveau indiquer n'importe quelle heure indépendamment les unes des autres.
- ceci nous permet de calculer le nombre total de configurations possibles :

$$(12)^9 \cdot (12)^{9-4} = 12^9 \cdot 12^5 = 12^{14}$$

$$12^{14} = 1'283'918'464'548'864$$

environ 1 million 300 mille milliards de possibilités.

A raison d'une configuration à la seconde, il nous faudrait 40 mille ans pour les atteindre toutes.

- les formules de résolution sont simples par rapport à celles qui permettent de résoudre le Rubik's cube. La raison est que dans notre cas l'ordre des mouvements n'a pas d'importance, ce qui n'est pas vrai dans le cas du Rubik's cube. Cette différence qui peut paraître minime est en fait essentielle et diminue considérablement la complexité du problème.

- un mouvement m (...,...,h) peut être considéré comme la somme de h mouvements identiques (...,...,1).
Si on adopte la notation : $m+m = 2.m$ et qu'on nomme m_1, $m_2, \dots, m_{30}$ les trente mouvements des pages 4 et 5, on remarque que toute formule peut s'écrire sous la forme :

$$h_1 \cdot m_1 + h_2 \cdot m_2 + \dots + h_{30} \cdot m_{30}$$

pour des h_i entiers satisfaisant $0 < h_i < 12$

- trouver une formule, revient donc à résoudre un système de congruences modulo 12.

- trouver une formule peut donc être ramené à résoudre un système d'équations sur les entiers.
Non simplifié, ce système possède 14 équations à 44 inconnues.
(30 inconnues : les h_i
14 inconnues : 1 par équation pour passer d'un système de congruence à un système d'équations.
14 équations : 1 par cadran indépendant.)

RESOLUTION GENERALE :

Introduction de notations :
Notons les deux faces de l'horloge par deux tableaux carrés

Face visible

NW	N	NE
W	C	E
SW	S	SE

Face cachée

	n	
w	c	e
	s	

où NW, N, NE... représentent l'heure indiquée par le cadran correspondant (les majuscules correspondent aux cadrans visibles, les minuscules aux cadrans cachés).

EXEMPLE :

4	3	9
1	2	11
0	11	7

	2	
11	2	11
	1	

Dans cet exemple, NW = 4, N = 3, NE = 9, etc

On peut montrer que 14 mouvements bien choisis suffisent à résoudre le problème général.

1) $\left(1, \begin{matrix} 1 & b \\ b & b \end{matrix}, h_1\right)$ où $h_1 = -NW+W-C+E+w-c$

2) $\left(1, \begin{matrix} b & 1 \\ b & b \end{matrix}, h_2\right)$ où $h_2 = NW-N-w+c$

3) $\left(1, \begin{matrix} b & b \\ b & 1 \end{matrix}, h_3\right)$ où $h_3 = -NW+N+W-C+w-c$

4) $\left(1, \begin{matrix} b & b \\ 1 & b \end{matrix}, h_4\right)$ où $h_4 = NW-W-w+c$

5) $\left(b, \begin{matrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}, h_5\right)$ où $h_5 = -w+c$

6) $\left(b, \begin{matrix} l & b \\ l & l \end{matrix}, h_6\right)$ où $h_6 = w-s$

7) $\left(b, \begin{matrix} l & l \\ l & b \end{matrix}, h_7\right)$ où $h_7 = -w+c-e+s$

8) $\left(l, \begin{matrix} l & l \\ b & b \end{matrix}, h_8\right)$ où $h_8 = N-W-E+S$

9) $\left(l, \begin{matrix} l & l \\ b & l \end{matrix}, h_9\right)$ où $h_9 = NW-N-W+C+SW-S+e$

10) $\left(l, \begin{matrix} l & l \\ l & l \end{matrix}, h_{10}\right)$ où $h_{10} = -NW+N-NE+W-C+E-SW+S-SE-w-e$

11) $\left(l, \begin{matrix} l & l \\ l & b \end{matrix}, h_{11}\right)$ où $h_{11} = -NW+W-S+SE-n+w$

12) $\left(l, \begin{matrix} l & b \\ l & l \end{matrix}, h_{12}\right)$ où $h_{12} = NW-N+NE-W+C-E+n$

13) $\left(b, \begin{matrix} l & b \\ b & l \end{matrix}, h_{13}\right)$ où $h_{13} = n-c+s$

14) $\left(b, \begin{matrix} l & l \\ b & b \end{matrix}, h_{14}\right)$ où $h_{14} = -n+w+e-s$

avec les congruences prises modulo 12

Dans l'exemple de la ......, on a

$h_1 = 3$, $h_2 = 4$, $h_3 = -5$, $h_4 = 6$, $h_5 = 3$, $h_6 = -2$, $h_7 = 5$

$h_8 = 2$, $h_9 = 2$, $h_{10} = 6$, $h_{11} = 2$, $h_{12} = 2$, $h_{13} = 1$, $h_{14} = -5$

(On choisit $h_i \in [-5,6]$ pour simplifier au maximum les opérations effectuées pour résoudre le problème)

SUGGESTIONS :

- On remarque qu'il existe une formule générale ne faisant intervenir que 14 mouvements.
Peut-on l'améliorer? (Certainement ! Mais un simple calcul combinatoire montre qu'il faut au moins 7 mouvements pour une formule générale). Cela mène droit à la notion de diamètre d'un graphe fini.

- Par le procédé général donné ci-dessus combien, en moyenne, utilise-t-on de mouvements (si $h_i = 0$ le mouvement correspondant n'est pas utilisé), pour remettre toutes les aiguilles des cadrans sur minuit ?

D.-O. Jaquet

mars 1991