La méthode d'abstraction extensive en physique: le déterminisme sans points euclidiens

Thomas Mueller

16 novembre 2009

Institut de Mathématiques Appliquées Institut de philosophie
Faculté des S.S.P. et de lettres
Université de Lausanne
Anthropole
1015 Lausanne

Table des matières

1 Régions et points **3**

2 L'axiomatique de Whitehead et Gerla **4**

2.1 Les axiomes 4

2.2 Remarques 8

3 Thermodynamique et niveaux de description **8**

3.1 M-niveau, B-niveau, N-niveau 9

3.2 W-niveau 11

3.3 Problèmes ouverts 12

1 Régions et points

Depuis Euclide et ses Eléments, tout étudiant qui a travaillé des notions élémentaires de géométrie s'est heurté au concept de **point euclidien**. Il n'est pas très aisé de définir ce qu'est un point ; nous en avons généralement une image héritée depuis notre formation scolaire, image qui d'habitude ne survit pas à une critique détaillée.

Dans « The concept of nature » Whitehead nous propose le point comme étant "sans partie et sans grandeur », une image qu'il reconnaît être «dans la forme qu'on m'a enseigné dans mon enfance [1] » En géométrie un point est donc un concept primitif. Intuitivement il équivaut à une entité dépourvue d'extension spatiale, il peut donc être pensé simplement comme une position, comme une coordonnée. Certains pensent aussi que le point, en soi, représente une figure géométrique. Aussi bien que Whitehead, je trouve la notion de « sans partie et sans grandeur » totalement contre-intuitive. On pourrait bien accepter un concept contre-intuitif, s'il nous était proposé à la suite d'une longue quête sémantique, ou s'il était le résultat tordu et quelque peu mystérieux d'un théorème fort cryptique. Malheureusement, ce qu'on nous dit du point euclidien c'est qu'il s'agit d'un concept primitif : il nous est donné a priori, un concept primitif en mathématique étant quelque chose qu'on nous demande d'accepter sans définition, ni explication, ni preuve, une brique fondamentale qui ne peut être définie d'aucune manière, puisque rien n'existe avant elle.
Il n'est certainement pas nécessaire de s'attarder sur la richesse de la géométrie euclidienne, sur sa portée, son importance, ses résultats tout au long de l'histoire. Sur cette géométrie, et par extension sur la notion de point, repose la quasi totalité de la physique, une grande partie des mathématiques, ainsi que toutes les sciences qui d'une manière ou d'une autre ont choisi de s'inspirer de ces deux disciplines. Pourtant, le problème posé par le contenu conceptuel de la notion de point demeure intacte ; c'est une notion difficile à comprendre. Il n'est donc pas aisé de l'accepter tacitement comme une notion primitive.

Il y a une deuxième approche, une approche qui est beaucoup plus tardive que celle d'Euclide, une approche qui a été proposée par A.N. Whitehead, puis discutée par Tarski, Grzegorczyk [2], et tout dernièrement par un nombre de plus en plus important de mathématiciens et logiciens.

L'approche en question - nous allons nous restreindre à la formulation proposée par Whitehead et aux extensions proposées par G. Gerla - refuse la notion de point comme primitive. L'idée est de choisir la notion de **région**, ou

1. Note en fin de texte
2. Grzegorczyk a abouti indépendamment à des résultats équivalents à ceux de Whitehead

d'événement, comme étant primitive ; ce choix nous paraît plus simple puisqu'il est intuitivement assez simple de comprendre ce qu'est une région. Une région possède une extension spatiale, elle fait partie de notre expérience directe ; c'est donc un concept plus simple à comprendre. Afin de remplacer la notion de distance entre points, qui était celle usuellement considérée en géométrie euclidienne, Whitehead propose la notion de *connexion* entre régions [3]. Deux régions sont dites en connexion si elles se touchent ; cette relation est aussi prise comme primitive. L'idée est de construire une géométrie qui soit fondée sur ces concepts plus intuitifs ; la contrainte sera alors de construire le point euclidien comme une notion dérivée de celle de région : il faudra donc donner un procédé (une "recette de cuisine") capable d'engendrer un point ou du moins quelque chose qui joue le même rôle. Si cette tache est accomplie, on aura donc une géométrie qui pourra bénéficier de tous les résultats de la géométrie euclidienne, mais qui échappera à la critique sur ses fondements flous.

2 L'axiomatique de Whitehead et Gerla

Whitehead nous propose une construction des points euclidiens grâce à sa méthode de l'abstraction extensive. Au cours de son travail il énonce un grand nombre d'axiomes et de propriétés, mais il ne donne pas de construction analytique rigoureuse, ni de théorème ou de démonstration formelle. Plus récemment G. Gerla et al. ont proposé une suite d'articles qui formalisent la prose whiteheadienne et se sont aussi plongés dans les détails formels, en ayant soin de prouver la complétude et l'indépendance des axiomes énoncés par Whitehead.

Giangiacomo Gerla a aussi démontré un théorème qui s'avère fort important pour nous ; il s'agit du rapport qu'il y a entre la notion de point dans l'ontologie des régions et celle de point euclidien ordinaire. Nous allons proposer un résumé de ces notions.

2.1 Les axiomes

Soit un ensemble de régions M ; ces régions sont considérées comme primitives : nous allons essayer de construire le point euclidien usuel, à partir de ces régions. Pour ce faire nous introduisons une deuxième notion primi-

3. Dans un premier temps, Whitehead propose la relation d'extension entre événements (des régions de 4 dimensions) [1] [2]. Une région s'étend sur une autre, si elle la couvre complètement. Il abandonne cette primitive en faveur de la connection entre régions suite au criticisme de de Laguna [3]. Gerla a montré que la notion de connexion permet de définir celle d'extension, mais la réciproque est fausse [4].

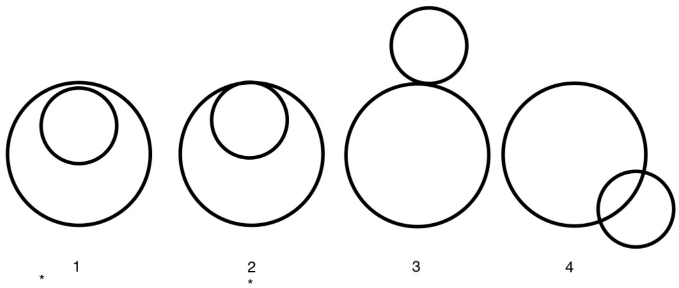

FIGURE 1 – Structures de connexion possibles : tous ces cercles sont connexes deux à deux. Dans 1 ils sont connexes et en inclusion non tangentielle. Dans 2 il sont connexes et en inclusion tangentielle. Dans 3 ils sont en connexion externe. Enfin dans quatre ils sont connexes et superposés

tive, sans définition, qui s'appelle C. La relation C entre les régions se dit de ***connexion*** : on écrira aCb, pour indiquer que a est en connexion avec b.

Il faut comprendre cette notion comme « **être en contact avec** ». Nous insistons une fois encore sur le fait que cette notion est primitive.

Afin d'alléger la notation nous introduisons des symboles derivés :

- on appellera $C(x)$ l'ensemble de tous les y qui sont en connexion avec x.
- L'intérêt de prendre C comme relation primaire, est que la notion d'inclusion peut être dérivée de celle de connexion. Soit deux régions x et y, nous disons que x est incluse dans y ($x \leq y$) si $C(x) \subseteq C(y)$ [4].
- On introduit la superposition S : on dira que x se superpose à y (xSy) s'il existe une région z telle que $z \leq x$ et $z \leq y$. Nous indiquerons $S(x)$ l'ensemble de tous les y qui se superposent à x.

Des affirmations de Whitehead on déduit le système d'axiomes suivants :

Axiome 2.1 [5] $\forall x \forall y (xCy \Rightarrow yCx)$

Axiome 2.2 [6] $\forall x \exists y \neg(xCy)$

Axiome 2.3 $\forall x \forall y \exists z (xCz \ et \ zCy)$

4. Le symbole $A \subseteq B$ indique que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B. Dans notre cas, puisque A et B sont des ensembles dont les éléments sont des *régions*, la signification est sans ambiguïté.

5. *Connection and mediate connection are both of them symmetrical relations ; that is to say, if region A is connected, or mediatly connected, with region B, then region B is connected, or mediatly connected, with region A* [5].

6. *No region is connected with all the other regions ; and any two regions are mediatly connected* [6], cette assomption vaut aussi pour l'axiome 2.3.

Axiome 2.4 [7] $\forall x(xCx)$

Axiome 2.5 $\forall x \forall y(x \leqslant y \text{ } et \text{ } y \leqslant x \Rightarrow x = y)$

Axiome 2.6 [8] $\forall z \, \exists x \leqslant z \, \exists y \leqslant z \neg(xCy)$

- L'axiome 2.1 assure que la relation d'inclusion est symétrique.
- L'axiome 2.2 nous dit qu'il n'y a aucune région connexe avec toutes les autres.
- L'axiome 2.3 nous dit qu'entre deux régions disjointes, il existe toujours une région milieu qui les connecte.
- L'axiome 2.4 impose la réflexivité de la connection : comme Whitehead le dit clairement il s'agit d'un choix convenable et non nécessaire ; il choisit l'antiréflexivité. Nous préferons en ligne avec les travaux de G.Gerla, et dans une optique plus moderne, la notion de réflexivité.
- L'axiome 2.5 exprime l'antisymetrie de l'inclusion.
- L'axiome 2.6, enfin, nous dit qu'il est toujours possible de trouver deux régions, incluses dans une région donnée, qui sont disjointes.

À ce point on introduit la notion de **dissection**.

Définition 2.1 *Une* **dissection** *d'une région x est un ensemble de régions D telles que :*

- *si y fait partie de D, alors elle est incluse dans x*
- *si y et z font partie de D et qu'elles sont différentes, alors y ne se superpose pas à z*
- *si une région y est incluse dans x, mais qu'elle n'est incluse dans aucun élément de la dissection de x, alors il existe t, z dans la dissection telles que ySt et ySz*

7. *No region is connected, or mediatly connected, with itself. This assumption is merely a convenient arrangement of nomenclature* [6], nous choisissons en effet le contraire. Les difficultés qui découlent de l'antinomie de Russell, obligent à choisir la réflexivité ou l'antiréflexivité. Ce n'est qu'une question de goût : les mathématiques modernes ont choisi de caractériser les ordres partiels comme étant des relations binaires réflexives, transitives et antisymétriques. Toute la bibliographie sur le sujet fait référence à ce cadre, ce qui justifie notre choix. L'axiomatique de Whitehead est intimement liée aux notions de filtre (filtre propre, principal, ultrafiltre) introduites par H. Cartan en 1937 ; or ces notions s'appuient sur l'outillage théorique des ordres partiels. Whitehead, ayant écrit dans une période qui précède Cartan, ne pouvait qu'opérer suivant son goût qui s'est avéré opposé à celui historique.

8. *Every region includes other regions ; and a pair of regions thus included in one region are not necessarily connected with each other. Such pairs can always be found, included in any given region[7].*

On notera $\prod(x)$ l'ensemble des dissections de x.

La notion de dissection (la traduction française de *Process and reality* propose le terme *découpage*) ressemble beaucoup à celle de partition, qui est couramment utilisée en mathématique. [9]

On obtient ainsi les axiomes 7 et 8 :

Axiome 2.7 $\forall x \exists D \in \prod(x)(D \neq \{x\})$

Axiome 2.8 [10] $\forall x \forall y \, \forall D_1 \in \prod(x) \, \forall D_2 \in \prod(y)(x \neq y \Rightarrow D_1 \neq D_2)$

L'axiome 2.7 affirme qu'il y a des dissections non banales ; Whitehead n'en a pas besoin, puisque il assume l'antireflexivité. L'axiome 2.8 affirme que si deux régions sont différentes, alors n'importe laquelle de leurs dissections doit être différente.

On peut donc définir l'intersection entre deux régions de la façon suivante :

L'intersection entre x et y est une région sous-région de x et y, qu'on appellera z telle que :

$$\forall t((t \leqslant x \text{ et } t \leqslant y \text{ et } tSz) \Rightarrow t \leqslant z) \tag{1}$$

On a donc le dernier axiome

Axiome 2.9 [11] $\forall x \forall y \forall t(t \leqslant x$ *et* $t \leqslant y$ t *n'est pas une intersection* $\Rightarrow \exists z_{x,y}(t \leqslant z_{x,y}))$

Nous pouvons définir

- la connexion externe : a et b sont en connexion externe si aCb, mais $\neg(aSb)$
- l'inclusion tangentielle : a est inclus tangentiellement dans b si $a \leq b$ et il existe une région qui est en connexion externe avec a et avec b
- l'inclusion non tangentielle de x avec y, notée $x << y$, si une région tCx est forcement tSy. Cela signifie que $x \ll y \overset{déf}{\iff} C(x) \subseteq S(y)$

On définit la ***classe d'abstraction extensive*** comme étant l'ensemble des régions A telles que :

9. La question est ouverte de savoir si les deux notions sont identiques. Dans [8] Pecoraro et Gerla identifient des conditions cadre à l'intérieur desquelles la notion de partition et de découpage sont équivalentes. Le traitement complet du cadre historique et des conditions d'équivalence mériterait à lui tout seule plusieurs pages de développement.

10. A dissection of a region is not a dissection of any other region [7]

11. Any region included in both of two overlapping regions, and not itself an intersect, is included in one, and only one, intersect [9]

1. A est totalement ordonnée par $\ll$
2. il n'y a pas de sous-région commune à tous les éléments de A

On dira que A, B ensembles abstractifs, A couvre B si chaque élément de A couvre un élément de B. Si A couvre B et B couvre A, on dira que $A \equiv B$, et on a l'espace quotient $\mathcal{GA}|_{\equiv}$

On appellera W-point tout élément minimal de ($\mathcal{GA}|_{\equiv}, \leqslant$)

Un théorème de Pecoraro/Gerla affirme que l'ensemble de points défini par Whitehead coïncide avec $\mathbb{R}^3$

2.2 Remarques

Ce que nous avons au final, c'est une construction des points euclidiens grâce aux régions ; cela implique que tout ce qui peut être décrit dans les termes et les concepts des points euclidiens est **réductible** aux régions ; autrement dit, on peut considérer le niveau descriptif des régions comme étant sous-jacent à celui des points euclidiens. Il paraît assez aisé de construire des régions dans l'ontologie des points euclidiens ; par contre il n'est pas évident qu'une description en termes de régions d'un problème physique et une description du même problème en termes de points euclidiens soient équivalents. Nous estimons qu'il est possible de choisir le niveau ontologique que l'on préfère ; si on choisit les régions, on peut construire des Whitehead-points qui jouent le rôle des points euclidiens. Si on choisit une ontologie basée sur les points euclidiens, on peut construire des régions d'un type donné si on en a besoin (circulaires par exemple), qui jouent le rôle des régions-primitives de Whitehead.

3 Thermodynamique et niveaux de description

Nous allons maintenant discuter synthétiquement un problème de thermodynamique qui déploie toutes les difficultés et les paradoxes cachés dans la notion de point euclidien. Nous allons nous situer dans l'ontologie basée sur le point euclidien dans un premier temps : conséquemment tout réductionnisme doit aboutir à une description en termes de points euclidiens qui soit compatible avec le niveau de description qu'on vient de réduire.

On va voir que ce n'est justement pas possible de réduire certaines propriétés thermodynamiques au niveau des points euclidiens ; notre stratégie consistera donc, dans un deuxième temps, à considérer que c'est le niveau des régions qui est ontologique.

Nous savons maintenant de quelle manière le niveau des points euclidiens peut émerger de celui des régions ; nous allons donc avancer l'idée qu'en considérant un niveau ontologique "à la Whitehead" nous pouvons résoudre un problème conceptuel en physique. Finalement, nous allons discuter le genre de difficultés qui sont liées à un tel choix ontologique.

3.1 M-niveau, B-niveau, N-niveau

La thermodynamique est le domaine de la physique qui s'occupe de la description des échanges de chaleur. Elle possède ses propres moyens de calcul et de travail : les variables qui sont décrites en thermodynamique sont le volume V, le nombre de particules N et l'énergie E d'un système. Ce sont des quantités extensives qui caractérisent de manière satisfaisante un système thermodynamique. Nous avons aussi trois grandeurs dérivées : ce sont la température T, la pression P et le potentiel chimique μ. Il s'agit de grandeurs intensives cette fois.

Le niveau de description de la thermodynamique est couramment référencé comme *macroscopique*. Nous abrégerons par M-niveau.

Chacune des variables considérées possède une description à un niveau microscopique, un niveau qui traite les systèmes thermodynamiques comme des ensembles de particules. Ainsi la température équivaut par exemple à la quantité de mouvement moyenne (la vitesse moyenne si l'on préfère) des particules du système considéré.

Il se trouve qu'il y a une grandeur qui est problématique : l'entropie. L'entropie possède une description cohérente au niveau macroscopique : c'est une fonction d'état, mesurée en $\frac{J}{K}$, qui donne la quantité de chaleur échangé à une température T. Au niveau microscopique, l'entropie est décrite comme une grandeur qui caractérise les distributions des particules dans l'espace des phases ; l'espace des phases est un espace à 6N dimensions, 6 pour chacune des N particules du système. Les 6 dimensions sont données par la position et la quantité de mouvement des particules.

Afin de calculer l'entropie, nous devons construire une grille (en 6 dimensions), avec des cases d'une certaine grandeur. On doit compter le nombre d'arrangements possibles des N particules dans les K cases de notre espace. Ceci nous donne, sur une échelle logarithmique, une mesure de l'entropie.

Par exemple, si on augmente le volume disponible pour un gas, son entropie augmente, mais si on augmente la température, tout en gardant constant son volume, l'entropie augmente aussi. En effet dans le premier cas on agit sur les dimensions "spatiales" de l'espace de phase, alors que dans le deuxième on agit sur ses dimensions "quantité de mouvement".

La difficulté est liée à ce fait : l'entropie nécessite un ensemble de cases, chaque case d'une épaisseur donné [12]. Il se trouve que nous décrivons habituellement un système thermodynamique comme étant un ensemble de particules, et chaque particule comme un objet qui occupe un point donné de l'espace de phase à un instant donné t.

Si nous acceptons des cases qui ont la dimension d'un point euclidien, alors chaque case est de mesure nulle, et donc l'occupation d'une case quelconque a une probabilité nulle ; nous n'avons plus de définition microscopique de l'entropie.

Si nous acceptons que la position d'un objet est une case de l'espace de phase avec un volume V donné, et si nous fixons le volume des cases, nous avons une définition de l'entropie, mais nous n'avons plus de localisation simple, dans un point euclidien. Or nous savons que si on localise deux particules dans une région d'épaisseur quelconque, et que les positions de ces deux particules sont initialement confondues (elles sont "dans la même case"), si elles se trouvent dans un système chaotique, elles vont vite se séparer et s'éloigner. Ceci est problématique puisque la notion de trajectoire est mise en crise et donne naissance à des paradoxes tels que celui de renversement des vitesses de Loschmidt [13], ou l'hypothèse du passé [14].

Nous introduisons donc deux niveaux distincts de description microscopiques, le **B-niveau** (en l'honneur de Stephan **B**oltzmann)) qui situe les particules dans des cases d'un volume donné, et le **N-niveau** (en l'honneur de Sir Isaac **N**ewton).

Dans une optique classique, le N-niveau est plus fondamental (puisqu'il est plus simple et il travaille avec des notions ontologiquement primitives, les points euclidiens) ; dans une optique réductionniste, nous devrions donc pouvoir réduire les descriptions du B-niveau à des descriptions du N-niveau. Nous prétendons que cela n'est pas possible, à cause notamment des paradoxes qu'on vient d'énoncer, et que si l'on choisit une ontologie basée sur les points euclidiens, on est en face d'un véritable argument **contre** le réductionnisme.

---

12. Chaque case à un volume, et par construction chaque case est un cube, elle a donc un côté de longueur donné. Cette longueur est ce que nous appelons "épaisseur".

13. Loschmidt proposa de renverser la vitesse de chaque particule pour ainsi voir l'entropie décroître : il ajouta que cette hypothèse engendre une situation dans laquelle l'entropie diminue pour chaque situation dans laquelle elle augmente.

14. L'hypothèse du passé est un argument quelque peu sophistiqué qui nous oblige à admettre que l'entropie était dans le passé beaucoup plus petite qu'elle ne l'est maintenant, et cela par hypothèse de travail (donc sans justification), sous peine de voir notre description tout entière s'écrouler.

3.2 W-niveau

Nous proposons d'introduire un niveau ontologique basé sur les notions de région et de connexion entre régions que l'on nomme **W-niveau** (en l'honneur de A.N. **W**hitehead). Dans cette optique, nous proposons de considérer le N-niveau comme une description construite à partir du W-niveau ; de même pour le B-niveau. Le N-niveau et le B-niveau n'étant plus fondamentaux, ils peuvent être considérés comme des niveaux à hiérarchie horizontale ; il n'est plus nécessaire de les réduire l'un à l'autre, et ils peuvent être considérés séparément, chacun étant un cas particulier de description, dans lequel on ignore certains détails du niveau inférieur.

Dans le cas du B-niveau on néglige toute région inférieure à la taille d'une case de la grille, et on s'intéresse uniquement à des régions avec une forme donnée, dans le cas du N-niveau on néglige la position-dans-une-région et on considère la localisation simple comme acceptable. On se retrouve donc avec des notions de trajectoire, mais on n'a pas, par exemple, d'entropie.

Si on accepte le W-niveau comme le niveau ontologique, on est de nouveau capable de réduire à un niveau fondamentale la thermodynamique, mais des questions se posent par rapport au déterminisme [15] des lois de Newton. Nous en exposons quelqu'un :

- C'est loin d'être clair, et il s'agit certainement d'un problème, de quelle manière le déterminisme pourrait être gardé si on accepte que des régions sont une condition initiale dans un problème chaotique. En effet, nous parlons de chaos déterministe dans le cas d'une forte sensibilité aux conditions initiales. Dans des cas plus drastiques, deux conditions initiales aussi proches que l'on veut, donnent naissance à deux trajectoires distinctes dans un temps très court. Si on accepte une région comme condition initiale, le "chaos déterministe" perd son caractère déterministe justement. Pour mieux comprendre on peut imaginer ceci : fixons une taille minimale de "région comme condition initiale" et fixons aussi une taille pour le système qu'on veut étudier ; si deux conditions ponctuelles initialement comprises dans une région donnée s'éloignent dans un temps t d'une distance qui est plus grande que la taille du système physique considéré, on peut estimer qu'après ce temps, on a perdu toute connaissance sur ce système. Nous savons que dans un problème véritablement chaotique, deux trajectoires s'éloignent de façon exponentielle

15. Nous définissons le determinisme de la manière suivante :

Définition de déterminisme 3.1 *The world $W \in \mathcal{W}$ is* **futuristically** Laplacian deterministic *just in case for any $W' \in \mathcal{W}$, if W and W' agree at any time, then they agree for all* ***later*** *times [10]* (je souligne) et donc ce cas de figure se réalise systématiquement.

– Ce n'est absolument pas clair de quelle manière une particule pourrait occuper une région ; ce problème n'existe évidement pas dans le cas de positions qui sont des points euclidiens, mais il se pose si la position est une région.

De façon générale, il apparaît que le choix d'une ontologie basée sur les régions rétabli le réductionnisme, mais qu'elle représente un problème majeur pour le déterminisme.

3.3 Problèmes ouverts

Outre les remarques qu'on vient de faire sur le déterminisme, et qui sont bien entendu encore des questions ouvertes, il y a quelques problèmes dont la solution est loin d'être claire :

1. il y a une confusion et une interdépendance entre l'ontologie des points euclidiens et celle des régions. De manière générale on a tendance à glisser d'une description à l'autre et à justifier certaines idées de l'une en recourant aux concepts de l'autre. S'il est clair que une longue tradition bien établie qui raisonne en premier sur les points euclidiens est un biais dont il est très difficile de se défaire, il nous semble aussi qu'il y a une interdépendance des concepts, et que des glissements sont hélas difficiles à éviter dans les deux sens.
2. L'ontologie des points euclidiens demande uniquement une relation externe entre ces points : la distance. Une ontologie basée sur les régions nécessite une relation interne - la connexion - qui permet de discuter les rapports entre deux régions qui se touchent (elle nous renseigne sur les parties internes de la région, sur ce qui se trouve à l'intérieur de cette région), mais elle nécessite aussi d'une notion externe de distance (sur l'espace qui ne fait pas partie de la région). Des propositions ont été avancées dans ce sens, mais on est loin d'avoir épuisé cette question [11] [12].
3. Les travaux de G. Gerla se bornent aux régions de l'espace ; Whitehead élargissait son cadre conceptuel au temps. Les conséquences d'une ontologie du temps basée sur les régions mériterait d'être discutée plus en détail [11] .
4. Toutes nos discussions se sont bornées - comme c'est souvent le cas en physique statistique - aux cas newtoniens. Il est cependant clair que, du moment ou l'on parle de très petites échelles, il devient important de faire appel au cadre conceptuel de la mécanique quantique [13]. Des investigations dans ce sens s'imposent.

Références

[1] Alfred North Whitehead. *The concept of nature.* Cambridge university press, 4th edition edition, 1955.

[2] Alfred North Whitehead. *An enquiry concerning the principles of natural knowledge.* Cambridge University Press, deuxième edition, 1925.

[3] Theodor De Laguna. Point, line and surface, as sets solids. *J. of philosophy*, 1922.

[4] Giangiacomo Gerla and Annamaria Miranda. Inclusion and connection in Whitehead's point-free geometry. *Handbook of Whiteheadian Process Thought*, 55(1) :207–219, 2006.

[5] A.N. Whitehead. *Process and reality*, page 417. Cambridge University Press, première edition, 1929.

[6] A.N. Whitehead. *Process and reality*, page 418. Cambridge University Press, première edition, 1929.

[7] A.N. Whitehead. *Process and reality*, page 419. Cambridge University Press, première edition, 1929.

[8] Antonio Pecoraro and Giangiacomo Gerla. Formalizzazione della geometria senza punti di A.N. Whitehead. Master's thesis, Università degli studi di Salerno, 2006.

[9] A.N. Whitehead. *Process and reality*, page 420. Cambridge University Press, première edition, 1929.

[10] John Earman. *A primer on determinism.* D. Reidel publishing company, 1986.

[11] Johan van Benthem. *The logic of time.* Kluwer academic publishers, deuxième edition, 1992.

[12] Giangiacomo Gerla. Pointless metric spaces. *The journal of symbolic logic*, 1990.

[13] Thomas Michael Mueller. Une nouvelle conception du déterminisme : l'espace-temps comme procès chez Whitehead. *Dogma, dogma.free.fr*, 2008.

[14] Peter Simons. Whitehead und die Mereologie. *Die Gifford Lectures und ihre Deutung. Materialien zu Whiteheads Prozess and Realität*, 1991.