

Jean-Marc Huguenin

## **Data Envelopment Analysis (DEA)**

**Un guide pédagogique à l'intention des décideurs  
dans le secteur public**

IDHEAP – Cahier 278/2013

Chaire Finances publiques

© 2013 IDHEAP, Lausanne  
ISBN 978-2-940390-56-4



Institut de hautes études en administration publique  
Swiss Graduate School of Public Administration  
Quartier UNIL Mouline – CH-1015 - Lausanne  
T : +41(0)21 557 40 00 – F : +41(0)21 557 40 09  
idheap@idheap.unil.ch – www.idheap.ch



## SOMMAIRE

Sommaire .....	I
Liste des tableaux.....	III
Liste des figures .....	IV
1 Introduction .....	7
2 Notions de base de la méthode DEA .....	8
2.1 Une méthode d'évaluation de la performance .....	8
2.2 Cas pratique 1 .....	9
2.3 Multiples <i>outputs</i> et <i>inputs</i> .....	26
2.4 Types d'efficacité.....	28
2.5 Implications managériales .....	29
3 Logiciel DEA.....	36
3.1 Logiciels existants .....	36
3.2 Cas pratique 2 .....	37
4 Modèles mathématiques de la méthode DEA .....	55
4.1 Rendements d'échelle constants.....	55
4.2 Rendements d'échelle variables.....	60
5 Extensions de la méthode DEA .....	67
5.1 Ajustement de l'efficacité aux conditions de l'environnement.....	67
5.2 Préférences.....	68
5.3 Analyse de sensibilité.....	69
5.4 Séries temporelles.....	70
6 DEA avec <i>Microsoft Excel</i> © Solveur .....	72
6.1 Solveur.....	72

6.2 Programmation d'un modèle CRS..... 73  
Références ..... 81

## **LISTE DES TABLEAUX**

TABLEAU 1: Cas pratique 1 – Les employés de cinq offices d'état civil produisent des documents.....	9
TABLEAU 2: Cas pratique 2 – En moyenne, chaque école forme 393,6 élèves avec 23,2 enseignants, 1,3 personnel administratif et 21,6 ordinateurs. ....	38
TABLEAU 3: Cas pratique 2 – Les abréviations utilisées dans le fichier des résultats et leur signification permettent de comprendre les résultats du modèle.....	46
TABLEAU 4: Cinq offices d'état civil produisent des certificats de naissance et de mariage avec des employés.....	74

## LISTE DES FIGURES

FIGURE 1: Cas pratique 1 – Les offices d'état civil situés sous la frontière d'efficience ont une marge d'amélioration.....	13
FIGURE 2: Cas pratique 1 – Avec la même quantité d' <i>inputs</i> , l'Office d'état civil D pourrait augmenter sa production de documents en la faisant passer du point D au point $D_{VRS-O}$ (autrement dit d'une quantité de 3 à 5 documents).....	15
FIGURE 3: Cas pratique 1 – Les Offices d'état civil A et E sont VRS efficaces mais CRS inefficients.....	18
FIGURE 4: Cas pratique 1 – Les Offices d'état civil A et D évoluent dans une situation de rendements d'échelle croissants –IRS– ; C et E évoluent dans une situation de rendements d'échelle décroissants –DRS–.....	20
FIGURE 5: Cas pratique 1 – Le ratio de productivité augmente avec la taille.....	22
FIGURE 6: Cas pratique 1 – Le ratio de productivité diminue avec la taille.....	23
FIGURE 7: Cas pratique 1 – Les Offices d'état civil A et B ont chacun deux pairs de référence.....	25
FIGURE 8: Cas pratique 1 – La méthode DEA ajuste les projections des organisations inefficientes sur la frontière en tenant compte des <i>slacks</i> .....	26

FIGURE 9: Cas pratique 2 – Une nouvelle feuille de calcul contient une DMU, un <i>output</i> et un <i>input</i> .....	39
FIGURE 10: Cas pratique 2 – Les <i>inputs</i> et des <i>outputs</i> sont à caractériser. ....	40
FIGURE 11: Cas pratique 2 – Une feuille de calcul <i>Win4DEAP</i> prête à l'emploi.....	42
FIGURE 12: Cas pratique 2 – Le cockpit de <i>Win4DEAP</i> permet de calibrer le modèle. ....	44
FIGURE 13: Cas pratique 2 – Un modèle VRS orienté input prêt à être exécuté. ....	45
FIGURE 14: Cas pratique 2 – L'efficacité technique totale (CRSTE) est décomposée en efficacité technique pure (VRSTE) et en efficacité d'échelle (SE).....	48
FIGURE 15: Cas pratique 2 – L'école 1 pourrait former 602 élèves avec 37,186 enseignants, 1,902 personnel administratif et 35,185 ordinateurs.....	51
FIGURE 16: Cas pratique 2 – Quatre pairs sont identifiés pour l'école 2. ....	52
FIGURE 17: Cas pratique 2 – L'école 3 peut réduire ses <i>inputs</i> en modifiant sa taille à la baisse. ....	53
FIGURE 18: Cas pratique 2 – Un tableau des résultats d'efficacité aide une organisation à prendre ses décisions sur une base objectivée. ....	54

FIGURE 19: La distance entre la frontière VRS et la frontière CRS correspond à l'efficacité d'échelle.....	61
FIGURE 20: La nature des rendements d'échelle est identifiée en comparant les modèles NIRS et VRS. ....	66
FIGURE 21: Trois paramètres sont à définir dans le Solveur. ....	73
FIGURE 22: Une feuille de calcul <i>Excel</i> © prête à l'emploi pour le Solveur.....	76
FIGURE 23: Les paramètres du Solveur sont spécifiés pour l'optimisation.....	78



# 1 INTRODUCTION

Ce guide présente la méthode *Data Envelopment Analysis* (DEA), une méthode d'évaluation de la performance<sup>1</sup>. Il est destiné aux responsables d'organisations publiques qui ne sont pas familiers avec les notions d'optimisation mathématique, autrement dit de recherche opérationnelle. L'utilisation des mathématiques est par conséquent réduite au minimum. Ce guide est fortement orienté vers la pratique. Il permet aux décideurs de réaliser leurs propres analyses d'efficacité et d'interpréter facilement les résultats obtenus.

La méthode DEA est un outil d'analyse et d'aide à la décision dans les domaines suivants :

- en calculant un score d'efficacité, elle indique si une organisation dispose d'une marge d'amélioration ;
- en fixant des valeurs-cibles, elle indique de combien les *inputs* doivent être réduits et les *outputs* augmentés pour qu'une organisation devienne efficace ;
- en identifiant le type de rendements d'échelle, elle indique si une organisation doit augmenter ou au contraire réduire sa taille pour minimiser son coût moyen de production ;
- en identifiant les pairs de référence, elle désigne quelles organisations disposent des *best practice* à analyser.

Après cette introduction, le Chapitre 2 présente les notions de base de la méthode DEA, notamment à l'aide d'un cas pratique pour comprendre son application de manière intuitive. Le Chapitre 3 décrit le fonctionnement de *Win4DEAP*, un logiciel permettant de réaliser des analyses d'efficacité basées sur la méthode DEA. Le Chapitre 4 est destinée à des lecteurs avertis qui souhaitent comprendre le fonctionnement mathématique de la méthode DEA. Quatre extensions de la méthode DEA sont abordées dans le Chapitre 5 : ajustement de l'efficacité aux conditions de l'environnement, prise en compte des préférences des décideurs, analyse de sensibilité et analyse de séries temporelles. Enfin, le Chapitre 6 montre comment programmer un modèle DEA basique à l'aide du Solveur de *Microsoft Excel* ©.

---

<sup>1</sup> *Le nom anglais Data Envelopment Analysis est habituellement utilisé en français. Il se traduit par méthode d'analyse par enveloppement des données.*

## 2 NOTIONS DE BASE DE LA METHODE DEA

### 2.1 UNE METHODE D'EVALUATION DE LA PERFORMANCE

La méthode DEA permet d'évaluer la performance des organisations (appelées *decision-making units* –DMUs–) qui transforment des ressources (*inputs*) en prestations (*outputs*). Elle est adaptée tant aux entreprises du secteur privé qu'aux organisations du secteur public. Elle peut également être appliquée à des entités comme des villes, des régions, des pays, etc. La méthode DEA a été développée par Charnes *et al.* (1978, 1981) pour évaluer l'efficacité d'un programme fédéral américain d'allocation de ressources aux écoles (« Programme *Follow Through* »). L'utilisation de la méthode DEA s'est ensuite généralisée dans les autres organisations publiques (hôpitaux, EMS, services sociaux, offices de chômage, usines électriques, unités de police, corps de l'armée, usines de traitement des déchets, entreprises de transports publics, entreprises forestières, bibliothèques, musées, théâtres, etc.) et dans le secteur privé (banques, assurances, commerces de détail, etc.).

Le score d'efficacité de chaque organisation est calculé par rapport à une frontière d'efficacité. Les organisations qui se situent sur la frontière ont un score de 1 (ou 100%). Les organisations qui sont localisées sous la frontière ont un score inférieur à 1 (ou 100%) –et disposent par conséquent d'une marge d'amélioration de leur performance. Relevons qu'aucune organisation ne peut se situer au-dessus de la frontière d'efficacité car il n'est pas possible d'obtenir un score supérieur à 100%. Les organisations situées sur la frontière servent de pairs (ou de *benchmarks*) aux organisations inefficaces. Ces pairs sont associés aux *best practice* observables. La méthode DEA est par conséquent une technique de *benchmarking*.

## 2.2 CAS PRATIQUE 1

Pour comprendre le fonctionnement « mécanique » de la méthode DEA de manière intuitive, un cas pratique simple est développé dans la présente section. Il comprend cinq organisations fonctionnant avec un *input* et un *output*. Rappelons toutefois que la méthode DEA peut inclure de multiples *inputs* et *outputs*.

Cinq offices d'état civil (A à E) produisent un *output* (nombre total de documents, comme les certificats de naissance ou de mariage) à l'aide d'un *input* (nombre d'employés en équivalents plein-temps)<sup>2</sup>. Les données sont contenues dans le Tableau 1. A titre d'illustration, deux employés travaillent dans l'Office d'état civil A. Ils produisent un document (durant une certaine période de temps donnée).

TABLEAU 1:

**Cas pratique 1 – Les employés de cinq offices d'état civil produisent des documents.**

Office d'état civil	<i>Input</i>	<i>Output</i>
	Employés (x)	Documents (y)
A	2	1
B	3	4
C	5	5
D	4	3
E	6	7

### a) Cas pratique 1 – Deux modèles DEA de base

Deux modèles de base sont utilisés en DEA, aboutissant chacun à l'identification d'une frontière d'efficience différente.

- Le premier modèle fait l'hypothèse que les organisations évoluent dans une situation de rendements d'échelle constants (modèle *constant returns to scale* –CRS–). Il est approprié lorsque toutes les organisations ont atteint leur taille optimale. Relevons que l'hypothèse de ce modèle est (très) ambitieuse. Pour opérer à leur taille optimale, les organisations doivent

<sup>2</sup> *Insistons sur le fait que la méthode DEA peut inclure de multiples inputs et outputs. Toutefois, pour représenter ce cas pratique dans un graphique à deux dimensions, un nombre total d'inputs et d'outputs de deux a été choisi (un input, un output).*

évoluer dans un environnement de concurrence parfaite, ce qui est rarement le cas. Le modèle CRS calcule un score d'efficacité appelé *constant returns to scale technical efficiency* (CRSTE).

- Le second modèle fait l'hypothèse que les organisations évoluent dans une situation de rendements d'échelle variables (modèle *variable returns to scale –VRS–*). Il est approprié lorsque les organisations n'opèrent pas à leur taille optimale. Cette hypothèse est privilégiée dans les cas de concurrence imparfaite ou de marchés régulés. Le modèle VRS calcule un score d'efficacité appelé *variable returns to scale technical efficiency* (VRSTE).

La comparaison entre les deux modèles permet d'identifier les sources d'inefficacité. L'efficacité technique sous hypothèse de rendements d'échelle constants (*constant returns to scale technical efficiency*) correspond à la mesure globale de la performance d'une organisation. Elle est composée d'une mesure d'efficacité technique pure (soit l'efficacité technique sous hypothèse de rendements d'échelle variables ou *variable returns to scale technical efficiency*) et d'une mesure d'efficacité d'échelle (*scale efficiency –SE–*). La Section 4.2 montre comment ces trois notions (CRSTE, VRSTE et SE) sont reliées les unes aux autres.

#### **b) Cas pratique 1 – Deux orientations possibles : vers les *inputs* ou vers les *outputs***

Un modèle DEA peut être orienté vers les *inputs* ou vers les *outputs* :

- Dans une orientation *input*, le modèle DEA minimise les *inputs* pour un niveau donné d'*outputs*; autrement dit, il indique de combien une organisation peut réduire ses *inputs* tout en produisant le même niveau d'*outputs*.
- Dans une orientation *output*, le modèle DEA maximise les *outputs* pour un niveau donné d'*inputs*. Autrement dit, il indique de combien une organisation peut augmenter ses *outputs* avec le même niveau d'*inputs*.

La frontière d'efficacité est différente selon un modèle CRS ou VRS (à ce sujet, voir la Section 4.2). Cependant, à l'intérieur de chacun de ces modèles, la frontière ne sera pas affectée par une orientation *input* ou *output*. A titre d'illustration, la frontière d'efficacité d'un modèle VRS sera exactement la même avec une orientation *input* ou *output*. Les organisations situées sur la frontière dans le cas d'une orientation *input* seront également situées sur la frontière dans le cas d'une orientation *output*.

Dans un modèle CRS, les scores d'efficacité technique sont les mêmes selon une orientation *input* ou *output*. Mais ces scores sont différents selon l'orientation retenue dans un modèle VRS. Coelli et Perelman (1996, 1999) relèvent cependant que, dans de nombreuses situations, le choix de l'orientation du modèle (*input* ou *output*) n'impactera les scores d'efficacité technique que de manière mineure dans un modèle VRS.

**Comment choisir entre une orientation *input* et une orientation *output* ?**

L'orientation du modèle doit être choisie en fonction des variables (*inputs* ou *outputs*) sur lesquelles les décideurs exercent le plus grand pouvoir de gestion. Par exemple, un directeur d'école publique a probablement plus de pouvoir de gestion sur le personnel enseignant (*input*) que sur le nombre d'élèves accueillis ou sur les résultats des élèves (*outputs*). Dans ce cas, une orientation *input* est plus appropriée.

Dans le secteur public, mais parfois également dans le secteur privé, un certain niveau de ressources est alloué et garanti aux organisations. Dans un tel cas de figure, les décideurs cherchent à maximiser les prestations fournies, et choisissent par conséquent une orientation *output*. Dans le cas contraire, si l'objectif des décideurs est de produire un certain niveau d'*outputs* (par exemple un quota imposé), ces derniers cherchent à minimiser la consommation de ressources. Ils optent par conséquent pour une orientation *input*.

Si aucune contrainte n'est imposée aux décideurs et si ces derniers exercent un pouvoir de gestion tant sur les ressources (*inputs*) que sur les prestations (*outputs*), l'orientation du modèle dépend des objectifs fixés aux organisations. Le but est-il de réduire les coûts (orientation *input*) ou de maximiser la production (orientation *output*) ?

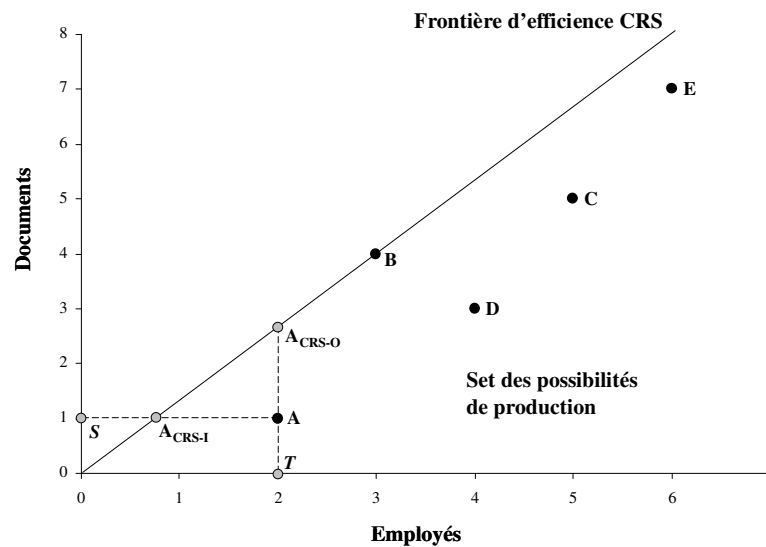
**c) Cas pratique 1 – Frontière d'efficacité CRS**

La Figure 1 représente la frontière d'efficacité sous hypothèse de rendements d'échelle constants (frontière d'efficacité CRS). La frontière d'efficacité CRS part de l'origine et passe par l'Office d'état civil B. Cet Office (B) est l'observation avec la pente la plus raide parmi les cinq offices. Autrement dit, elle présente le ratio de productivité « *outputs* par *input* » le plus élevé ( $4 / 3 = 1,33$ , autrement dit 1,33 document produit par employé). L'Office d'état civil B est sur la frontière d'efficacité ; il est efficace à 100%. Les Offices A, C, D et E sont situés sous la frontière. Leurs scores d'efficacité respectifs sont inférieurs à 100%.

La méthode DEA considère que le set des possibilités de production est limité par la frontière. Autrement dit, il n'est pas possible pour une organisation de se situer au-delà de la frontière, et par conséquent d'obtenir un hypothétique score d'efficacité supérieur à 100%. La méthode DEA calcule par conséquent des scores d'efficacité relatifs et non absolus. Les organisations situées sur la frontière sont efficaces à 100% car elles sont les plus efficaces de l'échantillon<sup>3</sup>.

FIGURE 1:

Cas pratique 1 – Les offices d'état civil situés sous la frontière d'efficacité ont une marge d'amélioration.



La Figure 1 illustre également la manière dont la méthode DEA calcule les scores d'efficacité. L'exemple de l'Office d'état civil A est décrit ci-dessous :

- Dans le cas d'une orientation *input*, le score d'efficacité de A est égal à la distance SA<sub>CRS-I</sub> divisée par la distance SA. A<sub>CRS-I</sub> est la projection du point A sur la frontière d'efficacité (sous

<sup>3</sup> Relevons que les organisations efficaces à 100% pourraient, selon toute vraisemblance, encore s'améliorer en augmentant leur productivité.

hypothèse de rendements d'échelle constants –CRS– et avec une orientation *input* –I–). Relevons qu'il est aisé de calculer les scores d'efficacité en utilisant une règle et en mesurant les distances directement sur le graphique. Le score de A est de 37,5%. Cela signifie que l'Office d'état civil A pourrait réduire le nombre de ses employés (*input*) de 62,5% (100 - 37,5) tout en continuant à produire le même nombre de documents (un).

- Dans le cas d'une orientation *output*, le score d'efficacité de A est égal à la distance TA divisée par la distance  $TA_{CRS-O}$ .  $A_{CRS-O}$  est la projection du point A sur la frontière d'efficacité (sous hypothèse de rendements d'échelle constants –CRS– et avec une orientation *output* –O–). Le score d'efficacité de A est de 37,5%, comme dans le cas de l'orientation *input*<sup>4</sup>. Cela signifie que l'Office d'état civil A pourrait augmenter le nombre de documents produits (*output*) de 62,5% (100 - 37,5) avec le même nombre d'employés (deux).

#### d) Cas pratique 1 – Frontière d'efficacité VRS

La Figure 2 représente la frontière d'efficacité sous hypothèse de rendements d'échelle variables (frontière d'efficacité VRS). La frontière d'efficacité VRS présente la particularité d'épouser la forme du nuage de points, autrement dit d'envelopper toutes les observations. Les Offices d'état civil A, B et E sont situés sur la frontière. Ils obtiennent tous un score d'efficacité de 100%. Les Offices d'état civil C et D sont situés sous la frontière. Leurs scores d'efficacité respectifs sont inférieurs à 100%.

La méthode DEA considère que le set des possibilités de production est limité par la frontière. Autrement dit, il n'est pas possible pour une organisation de se situer au-delà de la frontière, et par conséquent d'obtenir un hypothétique score d'efficacité supérieur à 100%. La méthode DEA calcule par conséquent des scores d'efficacité relatifs et

---

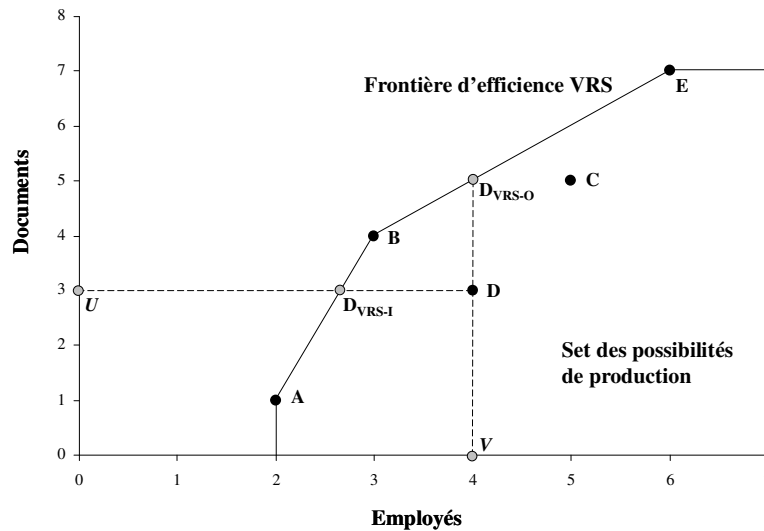
<sup>4</sup> Les scores d'efficacité d'un modèle CRS sont toujours les mêmes quelle que soit l'orientation (*input* ou *output*).



non absolus. Les organisations situées sur la frontière sont efficaces à 100% car elles sont les plus efficaces de l'échantillon<sup>5</sup>.

FIGURE 2:

Cas pratique 1 – Avec la même quantité d'inputs, l'Office d'état civil D pourrait augmenter sa production de documents en la faisant passer du point D au point  $D_{VRS-O}$  (autrement dit d'une quantité de 3 à 5 documents).



La Figure 2 illustre également la manière dont la méthode DEA calcule les scores d'efficacité. L'exemple de l'Office d'état civil D est décrit ci-dessous :

- Dans le cas d'une orientation *input*, le score d'efficacité de D est égal à la distance  $UD_{VRS-I}$  divisée par la distance  $UD$ .  $D_{VRS-I}$  est la projection du point D sur la frontière d'efficacité (sous hypothèse de rendements d'échelle variables –VRS– et avec une orientation *input* –I–). Relevons qu'il est aisé de calculer les scores d'efficacité à l'aide d'une règle en mesurant les

<sup>5</sup> Relevons que les organisations efficaces à 100% pourraient, selon toute vraisemblance, encore s'améliorer en augmentant leur productivité.

distances directement sur le graphique. Le score de D est de 66,7%. Cela signifie que l'Office d'état civil D pourrait réduire le nombre de ses d'employés (*input*) de 33,3% (100 - 66,7) tout en continuant à produire le même nombre de documents (trois).

- Dans le cas d'une orientation *output*, le score d'efficience de D est égal à la distance VD divisée par la distance  $VD_{VRS-O}$ .  $D_{VRS-O}$  est la projection du point D sur la frontière d'efficience (sous hypothèse de rendements d'échelle variables –VRS– et avec une orientation *output* –O–). Le score de D est de 60%<sup>6</sup>. Cela signifie que l'Office d'état civil D pourrait augmenter le nombre de documents produits (*output*) de 40% (100 - 60) avec le même nombre d'employés (quatre).

---

<sup>6</sup> Les scores d'efficience d'un modèle VRS sont différents selon l'orientation retenue (input ou output).

**Comment interpréter les scores d'efficacité selon l'orientation *input* ou *output* du modèle ?**

L'Office d'état civil C a un score d'efficacité de 75% dans le modèle CRS. Ce score est identique quelle que soit l'orientation du modèle (*input* ou *output*) sous hypothèse de rendements d'échelle constants. Cependant :

- Dans le cas d'une orientation *input*, la marge d'amélioration sur l'*input* (autrement dit sa réduction) est de 25% (100 - 75). Elle est calculée par rapport à la valeur d'**origine** de l'*input* (5 employés). Le modèle DEA calcule une valeur projetée de 3,75 employés. Elle correspond au nombre d'employés nécessaire pour être efficace à 100%, tout en produisant le même nombre de documents. La marge de 25% sur l'*input* est obtenue par le calcul suivant :  $[(5 - 3,75) / 5] \times 100$ . Pratiquement, une marge d'amélioration de 25% sur un *input* signifie que l'organisation devrait réduire cet *input* de 25% pour devenir efficace.
- Dans le cas d'une orientation *output*, la marge d'amélioration sur l'*output* (autrement dit son augmentation) est de 25% (100 - 75). Elle est cependant calculée par rapport à la valeur **projetée** de l'*output*. L'Office d'état civil C a une valeur d'origine de 5 documents (*output*). Le modèle DEA calcule une valeur projetée de 6,67 documents. Elle correspond au nombre de documents à produire pour être efficace à 100%, avec la même quantité d'employés. La marge de 25% sur l'*output* est obtenue par le calcul suivant :  $[(6,67 - 5) / 6,67] \times 100$ . Pratiquement, une marge d'amélioration de 25% sur un *output* signifie que l'organisation devrait augmenter cet *output* de 25% pour devenir efficace.

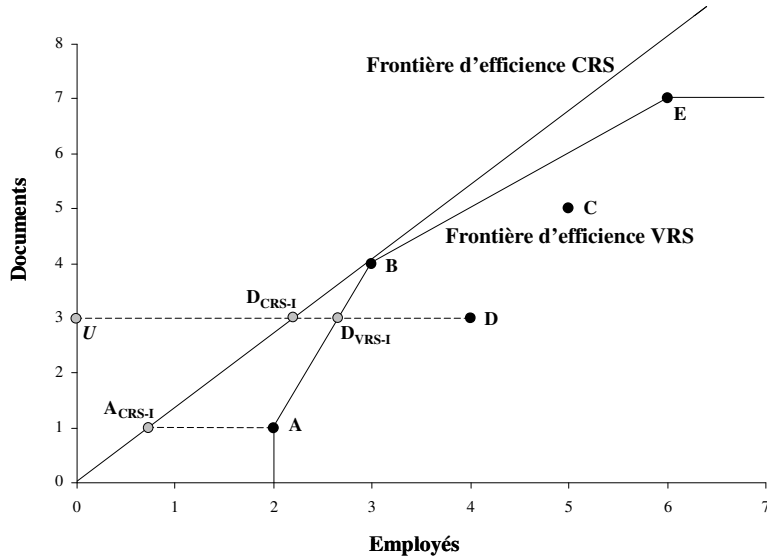
**e) Cas pratique 1 – CRS, VRS et efficacité d'échelle**

La Figure 3 représente sur le même graphique les frontières d'efficacité CRS et VRS. L'Office d'état civil B est localisé sur les deux frontières à la fois. Il est donc CRS et VRS efficace. Les Offices A et E sont efficaces sous hypothèse de rendements d'échelle variables mais inefficaces sous hypothèse de rendements d'échelle constants. Ils se

situent sur la frontière VRS mais pas sur la frontière CRS. Enfin, les offices D et C sont CRS et VRS inefficients. Ils ne se situent sur aucune frontière.

FIGURE 3:

Cas pratique 1 – Les Offices d'état civil A et E sont VRS efficaces mais CRS inefficients.



L'écart observé entre les frontières CRS et VRS s'explique par une inefficience d'échelle. Les organisations situées sur la frontière CRS opèrent à la taille optimale ; celles situées sur la frontière VRS opèrent à une taille non optimale, autrement dit une taille qui ne leur permet pas de minimiser leur consommation moyenne de ressources. A titre d'illustration, l'Office d'état civil A est VRS efficace. Pour devenir CRS efficace, il doit modifier sa taille (ou l'échelle à laquelle il opère). L'Office A peut le réaliser en se déplaçant du point A au point  $A_{CRS-I}$ . A ce point, il devient aussi productif que l'Office B, qui est le seul office CRS efficace.

Deux Offices (D et E) ne sont pas même situés sur la frontière VRS. Ces Offices n'ont pas seulement un problème de taille ; ils sont également

gérés de manière déficiente. A titre d'illustration, l'Office d'état civil D doit se déplacer au point  $D_{VRS-I}$  (situé sur la frontière VRS) pour devenir VRS efficient (autrement dit, pour annuler son inefficience due à une gestion perfectible). L'Office d'état civil D doit effectuer un mouvement supplémentaire, du point  $D_{VRS-I}$  au point  $D_{CRS-I}$  (situé sur la frontière CRS), pour devenir CRS efficient (autrement dit, pour annuler son inefficience due à un problème de taille).

Par conséquent, l'efficience CRS (aussi appelée efficience totale) est décomposée en deux parties: l'efficience VRS (aussi appelée efficience pure) et l'efficience d'échelle. Les ratios suivants représentent ces trois types d'efficience appliqués à l'Office d'état civil D (dans le cas d'une orientation *input*).

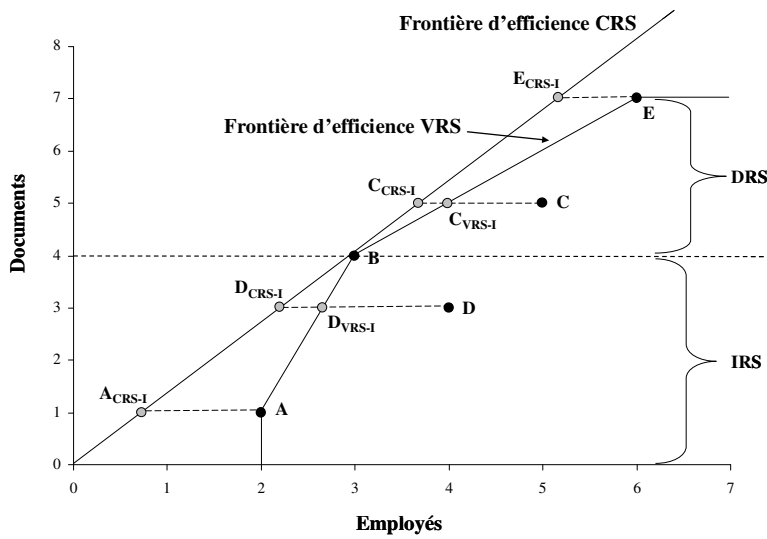
Efficience technique de D sous hypothèse CRS (efficience totale)	Efficience technique de D sous hypothèse VRS (efficience pure)	Efficience d'échelle de D
$TE_{CRS} = \frac{UD_{CRS-I}}{UD} = 56.3\%$	$TE_{VRS} = \frac{UD_{VRS-I}}{UD} = 66.7\%$	$SE = \frac{UD_{CRS-I}}{UD_{VRS-I}} = 84.4\%$

#### f) Cas pratique 1 – Nature des rendements d'échelle

La nature des rendements d'échelle des offices d'état civil qui ne sont pas situés sur la frontière CRS (en d'autres termes, qui présentent une inefficience d'échelle) reste à identifier. La Figure 4 représente les points CRS efficaces  $A_{CRS-I}$  et  $E_{CRS-I}$ . Ces points sont les projections des Offices d'état civil A et E sur la frontière CRS. Relevons que ces deux Offices sont VRS efficaces (ils se situent sur la frontière VRS) mais CRS inefficients (ils ne se situent pas sur la frontière CRS). La Figure 4 représente également les points CRS efficaces  $D_{CRS-I}$  et  $C_{CRS-I}$ . Ces points sont les projections des Offices d'état civil D et E sur la frontière CRS. Enfin, elle représente les points VRS efficaces  $D_{VRS-I}$  et  $C_{VRS-I}$ . Ces points sont les projections des Offices d'état civil D et C sur la frontière VRS. Relevons que ces deux Offices sont VRS et CRS inefficients : ils ne se situent sur aucune des deux frontières.

FIGURE 4:

Cas pratique 1 – Les Offices d'état civil A et D évoluent dans une situation de rendements d'échelle croissants –IRS– ; C et E évoluent dans une situation de rendements d'échelle décroissants –DRS–.



Pour identifier la nature des rendements d'échelle, la productivité des points VRS efficaces (A, D<sub>VRS-I</sub>, B, C<sub>VRS-I</sub> et E) doit être analysée. Trois situations peuvent se présenter :

- Un office d'état civil est situé sur les deux frontières (CRS et VRS) en même temps (comme le point B). L'Office d'état civil B a la productivité la plus forte de tous les points VRS efficaces ( $4 / 3 = 1,33$ ). Un tel office évolue dans une situation de rendements d'échelle constants. Une organisation dans une telle situation a atteint sa taille optimale<sup>7</sup> (ou son échelle

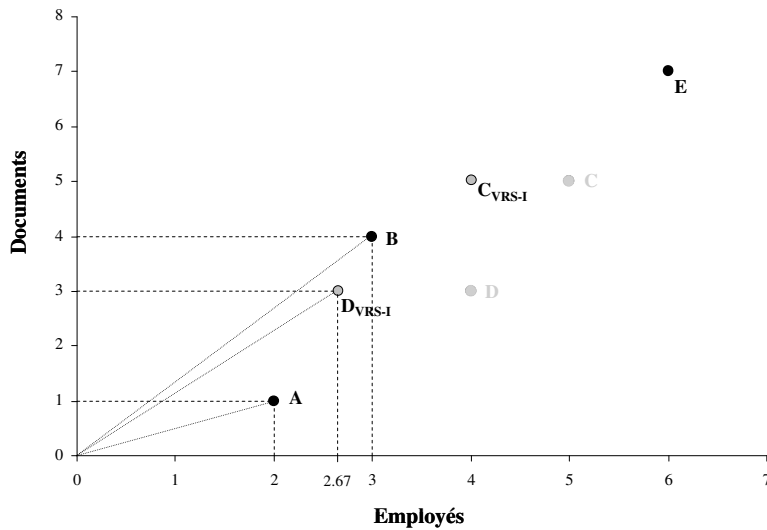
<sup>7</sup> Dans le contexte économique, une entreprise a atteint sa taille optimale lorsqu'elle minimise son coût moyen de production. Dans le contexte DEA, l'efficacité peut être mesurée en termes physiques et monétaires. Comme les informations concernant les coûts des inputs et les prix des outputs ne sont pas toujours disponibles ou pertinentes, la mesure de l'efficacité technique est souvent privilégiée. Cette dernière étant basée sur des variables mesurées en termes physiques, l'expression de « consommation moyenne de ressources » est utilisée à la place de celle de « coût moyen de production ».

efficente). Elle opère à un point où la taille n'exerce pas d'impact sur la productivité. Cette situation se produit lorsque la consommation moyenne de ressources est minimisée et ne varie pas avec une augmentation de l'*output* produit. Dans une situation de rendements d'échelle constants, une variation dans la production d'*output* de 1% implique une variation proportionnelle dans la consommation d'*input* (soit de 1% également).

- Un office d'état civil (ou la projection d'un office d'état civil) opère à un point où la taille exerce un impact positif sur la productivité. Les points A et  $D_{VRS-I}$  se trouvent dans une telle situation (cf. Figure 5). La productivité de A ( $1 / 2 = 0,5$ ) est inférieure à celle de  $D_{VRS-I}$  ( $3 / 2,67 = 1,12$ ). Le ratio de productivité augmente avec la taille. Cette situation se produit jusqu'au point B, qui présente une productivité de 1,33. Les Offices A et D évoluent par conséquent dans une situation de rendements d'échelle croissants (*increasing returns to scale – IRS–*). Cette situation se produit lorsque la consommation moyenne de ressources diminue avec une augmentation de l'*output* produit. Une organisation dans une telle situation n'a pas encore atteint sa taille optimale. Pour améliorer son efficence d'échelle, elle doit augmenter sa production. Dans une situation d'économies d'échelle, une variation dans la production d'*output* de 1% implique une variation dans la consommation d'*input* de moins de 1%. Ainsi, une augmentation de la production d'*output* se traduit par une réduction de la consommation moyenne de ressources.

FIGURE 5:

Cas pratique 1 – Le ratio de productivité augmente avec la taille.



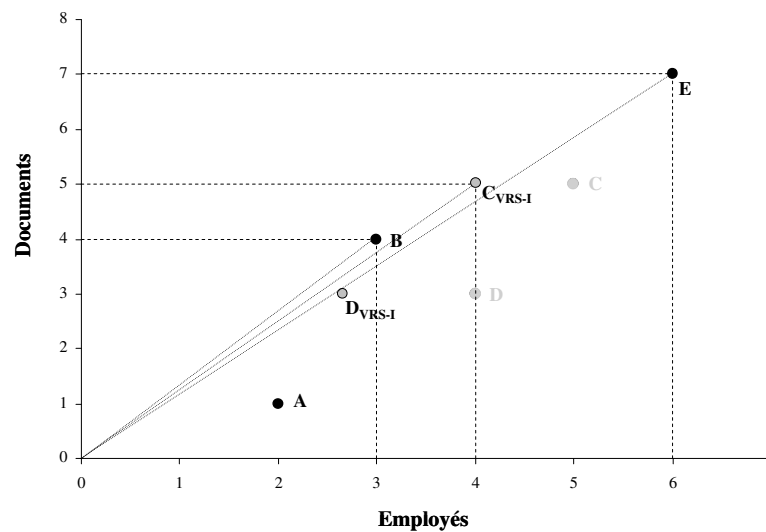
- Un office d'état civil (ou la projection d'un office d'état civil) opère à un point où la taille exerce un impact négatif sur la productivité. Les points  $C_{VRS-I}$  et E se trouvent dans une telle situation (cf. Figure 6). La productivité de  $C_{VRS-I}$  ( $5 / 4 = 1,25$ ) est supérieure à celle de E ( $7 / 6 = 1,17$ ). Le ratio de productivité diminue avec la taille. Cette situation se produit à partir du point B, qui présente une productivité de 1,33. Les Offices C et E évoluent par conséquent dans une situation de rendements d'échelle décroissants (*decreasing returns to scale* –DRS–). Cette situation se produit lorsque la consommation moyenne de ressources augmente avec une augmentation de l'*output* produit. Une organisation dans une telle situation a d'ores et déjà dépassé sa taille optimale. Pour améliorer son efficacité d'échelle, elle doit réduire sa production. Dans une situation de déséconomies d'échelle, une variation dans la production d'*output* de 1% implique une variation dans la consommation d'*input* de plus de 1%. Ainsi, une diminution de



la production d'*output* se traduit par une réduction de la consommation moyenne de ressources.

FIGURE 6:

Cas pratique 1 – Le ratio de productivité diminue avec la taille.



Les situations des cinq offices, en termes de rendements d'échelle, sont spécifiquement décrites ci-dessous (cf. Figure 4) :

- L'Office d'état civil A est situé sur la frontière VRS (mais pas sur la frontière CRS). Son inefficience est due à une taille non optimale. A évolue dans une situation de rendements d'échelle croissants. Une variation de l'*output* de 1% se traduit par une variation de l'*input* de moins de 1%.
- L'Office d'état civil D n'est situé ni sur la frontière VRS ni sur la frontière CRS. Son inefficience est due à une gestion perfectible d'une part et à une taille non optimale d'autre part. D évolue dans une situation de rendements d'échelle croissants. Une variation de l'*output* de 1% se traduit par une variation de l'*input* de moins de 1%.

- L'Office d'état civil B est situé et sur la frontière VRS et sur la frontière CRS. Il ne présente pas d'inefficience. B évolue dans une situation de rendements d'échelle constants. Une variation de l'*output* de 1% se traduit par une variation de l'*input* de 1%.
- L'Office d'état civil C n'est situé ni sur la frontière VRS ni sur la frontière CRS. Son inefficience est due à une gestion perfectible d'une part et à une taille non optimale d'autre part. C évolue dans une situation de rendements d'échelle décroissants. Une variation de l'*output* de 1% se traduit par une variation de l'*input* de plus de 1%.
- L'Office d'état civil E est situé sur la frontière VRS (mais pas sur la frontière CRS). Son inefficience est due à une taille non optimale. E évolue dans une situation de rendements d'échelle décroissants. Une variation de l'*output* de 1% se traduit par une variation de l'*input* de plus de 1%.

### g) Cas pratique 1 – Pairs (ou *benchmarks*)

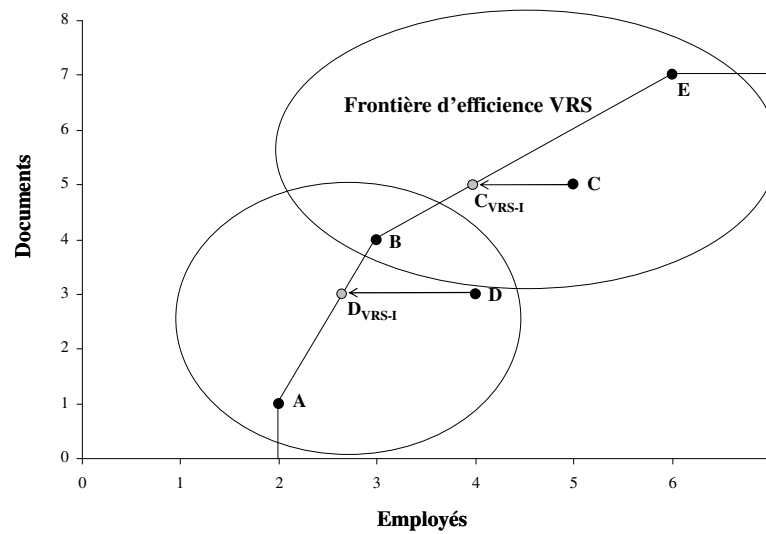
DEA identifie, pour chaque organisation inefficente, les organisations efficaces qui se rapprochent le plus de sa fonction de production. Ces organisations efficaces sont appelées pairs ou *benchmarks*. Si les organisations inefficentes veulent améliorer leur performance, elles doivent analyser les *best practice* développées par leurs pairs respectifs.

Sous hypothèse de rendements d'échelle constants, l'Office d'état civil B est la seule organisation située sur la frontière d'efficience. Par conséquent, il est identifié comme le pair de référence de tous les autres offices (inefficients).

La Figure 7 représente les pairs sous hypothèse de rendements d'échelle variables. Trois Offices d'état civil (A, B et E) sont situés sur la frontière d'efficience. Deux Offices (C et D) sont inefficients. L'office C a deux pairs de référence : B et E. Ces deux *benchmarks* sont situés sur le segment de la frontière sur lequel se trouve  $C_{VRS-1}$ , la projection du point C sur la frontière VRS. L'office D a également deux pairs de référence : A et B. Ces deux *benchmarks* sont situés sur le segment de la frontière sur lequel se trouve  $D_{VRS-1}$ , la projection du point D sur la frontière VRS.

FIGURE 7:

Cas pratique 1 – Les Offices d'état civil A et B ont chacun deux paires de référence.



#### h) Cas pratique 1 – *Slacks*

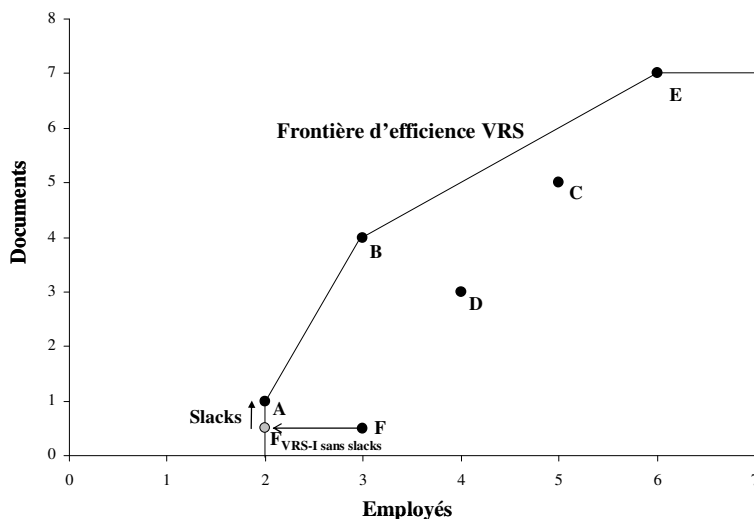
Certaines positions situées sur la frontière d'efficacité ne sont, paradoxalement, pas efficaces. Considérons l'Office F, un office d'état civil additionnel. Il produit 0,5 document avec deux employés. La Figure 8 représente la frontière d'efficacité VRS. L'office F n'est pas situé sur la frontière. Pour devenir efficace, F doit se déplacer, dans un premier temps, jusqu'au point  $F_{VRS-I \text{ sans slacks}}$ . A cet endroit, l'Office F devrait obtenir un score de 100%, car il est localisé sur la frontière. Mais l'Office A, à côté de lui sur la frontière, est également efficace à 100%. Et la différence entre F et A est frappante : avec la même quantité d'*inputs* (deux employés chacun), F produit 0,5 documents alors que A en produit 1 (donc 0,5 de plus que F). Ainsi, le point  $F_{VRS-I \text{ sans slacks}}$  ne peut pas être considéré comme 100% efficace, car il produit moins d'*outputs* avec la même quantité d'*inputs* qu'un autre office (A). Pour obtenir un score d'efficacité de 100%, le point  $F_{VRS-I \text{ sans slacks}}$  doit se

déplacer, dans un deuxième temps, jusqu'au point A. Ce mouvement additionnel nécessaire pour devenir efficace est appelé un *slack*.

En conséquence, chaque point situé sur les segments de la frontière qui sont parallèles aux axes doit être ajusté aux *slacks*. La méthode DEA est conçue pour prendre en compte les *slacks*.

FIGURE 8:

**Cas pratique 1 – La méthode DEA ajuste les projections des organisations inefficaces sur la frontière en tenant compte des *slacks*.**



### 2.3 MULTIPLES *OUTPUTS* ET *INPUTS*

La méthode DEA permet de prendre en compte de multiples *outputs* et de multiples *inputs*. A titre d'illustration, considérons des entreprises de vêtements produisant des T-shirts, des pantalons et des sous-vêtements (trois *outputs*) à l'aide de main-d'œuvre, de machines et de tissu (trois *inputs*). La méthode DEA parvient à intégrer dans l'évaluation de la performance toutes ces variables. En conséquence, la méthode DEA va au-delà du calcul de ratios de productivité unitaire, comme par exemple

le nombre de T-shirts par employé (autrement dit un *output* divisé par un *input*).

Le nombre total d'*outputs* et d'*inputs* pouvant être pris en compte n'est cependant pas illimité : il dépend du nombre d'organisations à comparer. Si le nombre d'organisations est inférieur à trois fois la somme du nombre total d'*outputs* et d'*inputs*, il est très probable que toutes (ou presque) les organisations obtiendront un score de 100%<sup>8</sup>. Par exemple, un échantillon contenant 21 entreprises de vêtements permet de prendre en compte un nombre total d'*outputs* et d'*inputs* de 7 (21 divisé par 3).

La méthode DEA mesure l'efficacité des organisations sur la base de multiples *outputs* et *inputs*. Si l'entreprise de vêtements A produit beaucoup de T-shirts mais peu de pantalons et de sous-vêtements, la méthode DEA va automatiquement allouer un poids important à la variable T-shirts pour mettre l'accent sur la force de cette entreprise. En conséquence, la méthode DEA optimise « automatiquement » le poids (autrement dit l'importance) alloué à chaque variable pour que chaque organisation obtienne le score d'efficacité le plus élevé possible.

La particularité de la méthode DEA est que les poids alloués aux *outputs* et aux *inputs* ne sont pas choisis par les décideurs<sup>9</sup>. De plus, la méthode n'utilise pas un set de poids commun pour toutes les organisations. A la place, un set de poids différent est calculé pour chaque organisation, de manière à ce que chaque organisation obtienne le score d'efficacité le plus élevé possible.

Malheureusement, la méthode DEA ne fonctionne pas avec des valeurs négatives ou nulles pour les *outputs* et les *inputs*. Les valeurs nulles

---

<sup>8</sup> Plus le nombre d'*outputs* et d'*inputs* est élevé pour un nombre d'organisations donné, plus il est probable que chaque organisation sera la meilleure prestataire d'au moins un des *outputs*. En conséquence, le nombre d'organisations obtenant un score d'efficacité de 100% sera (trop) élevé. Comme Cooper et al. (2006, p. 106) le relèvent, « if the number of DMUs ( $n$ ) is less than the combined number of inputs and outputs ( $m + s$ ), a large portion of the DMUs will be identified as efficient and efficiency discrimination among DMU is questionable due to an inadequate number of degrees of freedom. (...). Hence, it is desirable that  $n$  exceeds  $m + s$  by several times. A rough rule of thumb in the envelopment model is to choose  $n$  (= the number of DMUs) equal to or greater than  $\max\{m \times s, 3 \times (m + s)\}$ . »

<sup>9</sup> Cela est vrai dans les modèles de base présentés dans ce guide. Une extension de la méthode DEA permet toutefois aux décideurs de fixer eux-mêmes les poids associés aux variables (cf. Section 5.2).

peuvent toutefois être remplacées par des valeurs positives proches de zéro (comme 0,01).

Une distinction est réalisée entre les variables qui sont sous le contrôle – ou la gestion– des décideurs (variables discrétionnaires) et celles qui ne le sont pas (variables non discrétionnaires ou variables environnementales). Idéalement, un modèle DEA ne devrait intégrer que les variables discrétionnaires<sup>10</sup>. Dans une seconde étape, les scores d'efficacité ainsi calculés peuvent être ajustés aux variables environnementales. Les variables environnementales influencent l'efficacité des organisations mais ne sont pas considérées comme des *inputs* traditionnels et ne sont pas sous le contrôle des décideurs.

Les variables devraient refléter les dimensions quantitatives et qualitatives des ressources et des prestations des organisations. Malgré le fait qu'il n'est pas toujours facile d'identifier et de convertir en chiffres la dimension qualitative des variables, il est souhaitable de les intégrer dans l'analyse d'efficacité pour comparer les organisations de manière convaincante.

## 2.4 TYPES D'EFFICACITE

La notion d'efficacité fait référence à une situation optimale (*output* maximum pour un niveau donné d'*input* ou *input* minimum pour un niveau donné d'*output*). En fonction des données disponibles, différents types d'efficacité sont mesurables :

- *technical efficiency* : les *outputs* et les *inputs* sont mesurés en termes physiques<sup>11</sup> ;

---

<sup>10</sup> Relevons toutefois que certains modèles DEA peuvent prendre en compte des variables non discrétionnaires ou environnementales (cf. Section 5.1).

<sup>11</sup> Ce guide pédagogique se concentre sur la mesure de l'efficacité technique pour deux raisons. Tout d'abord, les organisations du secteur public ne peuvent généralement pas être tenues pour responsables de la pyramide des âges de leurs collaborateurs. Prendre en compte le salaire des collaborateurs (qui augmentent souvent avec le degré de séniorité) pénaliserait injustement l'efficacité des organisations avec une proportion élevée de collaborateurs âgés. Ensuite, les organisations du secteur public ne produisent généralement pas des biens et des services commerciaux caractérisés par un prix.

- *cost efficiency* : les *outputs* sont mesurés en termes physiques et les *inputs* sont mesurés en termes physiques **et** monétaires ;
- *revenue efficiency* : les *inputs* sont mesurés en termes physiques et les *outputs* sont mesurés en termes physiques **et** monétaires ;
- *profit efficiency* : les *outputs* et les *inputs* sont mesurés en termes physiques **et** monétaires.

L'efficacité technique (*technical efficiency*) est une mesure globale de la performance d'une organisation. Elle n'indique toutefois pas la source des inefficiences constatées, qui peut être double :

- tout d'abord, l'organisation peut être inefficace car sa gestion est perfectible (pour ne pas dire déficiente) ;
- ensuite, l'organisation peut être inefficace car elle n'a pas atteint sa taille optimale.

La méthode DEA permet de décomposer l'efficacité technique pour refléter ces deux sources d'inefficacité : la notion d'efficacité technique pure (*pure technical efficiency*) se rapporte à l'inefficacité liée à une gestion perfectible ; la notion d'efficacité d'échelle (*scale efficiency*) se rapporte quant à elle à l'inefficacité liée à une taille non optimale<sup>12</sup>.

## 2.5 IMPLICATIONS MANAGERIALES

La méthode DEA est une technique de *benchmarking*. Les scores d'efficacité renseignent sur la marge d'amélioration des organisations en termes de consommation d'*inputs* et de production d'*outputs*. En ce sens, la méthode DEA constitue un outil robuste d'aide à la décision. Des questions pratiques se posent souvent lors de la réalisation d'une

---

<sup>12</sup> Le management d'une organisation sera définitivement tenu pour responsable du score d'efficacité technique pure. Dans une situation où il n'a pas le pouvoir discrétionnaire de modifier la taille de l'organisation (où l'échelle à laquelle elle opère), il ne sera vraisemblablement pas tenu pour responsable du score d'efficacité d'échelle. Dans certains cas cependant, et notamment dans le secteur privé, le management peut influencer la taille de l'organisation. Il peut réduire les opérations ou, avec quelques efforts, l'augmenter également.

analyse d'efficacité et de l'interprétation des résultats. La liste suivante de *frequently asked questions* offre différents conseils.

- **Les managers des organisations à comparer doivent-ils être associés dès le départ à l'analyse d'efficacité ?**

Oui, de préférence, et pour trois raisons principales. Tout d'abord, les managers sont les personnes qui connaissent le mieux le processus de production de leurs organisations. Ils sont par conséquent les mieux placés pour identifier de manière pertinente les *inputs* et les *outputs* à intégrer dans l'analyse d'efficacité. Ensuite, le fait d'associer les managers leur permet de mieux s'approprier la démarche et, par extension, les résultats. A contrario, le fait de ne pas associer les managers peut aboutir à un rejet des résultats. Dans ce cas, les managers prétextent souvent la non pertinence des variables prises en compte. Enfin, le fait d'associer les managers à la démarche produit un effet formateur : ils prennent conscience des variables essentielles qui devraient être intégrés dans l'analyse d'efficacité et qui ne sont pas forcément disponibles, faute de statistiques.

- **Comment répondre à un manager qui affirme que son organisation est différente des autres et ne peut, par conséquent, pas être comparée avec les autres organisations ?**

Parfois, les inefficiences s'expliquent par des variables environnementales. D'autres fois, non, ou seulement partiellement. Les managers justifient souvent un faible score d'efficacité par les conditions particulières auxquelles est soumise leur organisation. Ils affirment que ces conditions particulières s'éloignent fortement des autres organisations qui obtiennent des scores d'efficacité plus élevés. En d'autres termes, ils affirment que leur organisation est un cas spécial. Par conséquent, il est normal d'être inefficace (ou moins efficace que les autres). En fait, chaque organisation pourrait probablement prétendre être différente, car chaque organisation possède une spécificité que les autres n'ont pas. Mais même



dans ce cas, il est vraisemblable que la différence de l'une soit compensée par la différence de l'autre. Plus généralement, les managers qui prétendent évoluer dans des conditions particulièrement hostiles doivent le démontrer de manière convaincante. Le « fardeau de la preuve » leur incombe. S'ils ne parviennent pas à le faire, des mesures managériales doivent être prises pour améliorer l'efficacité.

- **Considérons une organisation qui obtient un score d'efficacité de 86,3%. Ce score doit-il être pris « au pied de la lettre » et être strictement appliqué ?**

Un score d'efficacité doit plutôt être considéré comme un ordre de grandeur. Cet ordre de grandeur indique aux managers qu'ils doivent augmenter leurs *outputs* ou réduire leurs *inputs* pour améliorer l'efficacité. Mais il ne faut pas se focaliser de manière trop stricte sur la marge d'amélioration précise (de 13,7% dans notre exemple). Un tel nombre pourrait être interprété comme trop « précis » par certains managers. Par conséquent, il est préférable de considérer le score d'efficacité comme une information objectivée permettant d'ouvrir la discussion sur la manière d'améliorer l'efficacité de l'organisation.

- **Une organisation évolue dans une situation d'économies d'échelle (rendements d'échelle croissants). D'un point de vue managérial, qu'est-ce que cela signifie concrètement ?**

Une telle organisation n'a pas encore atteint sa taille optimale. Elle est trop petite. Pour réduire son coût moyen (ou sa consommation moyenne de ressources), elle doit augmenter sa taille (autrement dit, opérer à une échelle plus grande). Pratiquement, cela peut être réalisé par croissance interne, autrement dit en produisant plus d'*outputs*, ou en fusionnant avec une autre organisation qui se trouve également dans une situation de rendements d'échelle croissants. Si, pour différentes raisons, les managers ne peuvent pas influencer la taille de l'organisation, ils ne peuvent pas être tenus pour responsables de l'inefficacité d'échelle.

- **Une organisation évolue dans une situation de déséconomies d'échelle (rendements d'échelle décroissants). D'un point de vue managérial, qu'est-ce que cela signifie concrètement ?**

Une telle organisation a d'ores et déjà dépassé sa taille optimale. Elle est trop grande. Pour réduire son coût moyen (ou sa consommation moyenne de ressources), elle doit réduire sa taille (autrement dit, opérer à une échelle plus restreinte). Pratiquement, cela peut être réalisé par décroissance interne, autrement dit en produisant moins d'*outputs*, ou en divisant l'organisation en deux entités distinctes. Relevons qu'une partie de la production pourrait également être transférée à une autre organisation qui se trouve en situation de rendements d'échelle croissants. Si, pour différentes raisons, les managers ne peuvent pas influencer la taille de l'organisation, ils ne peuvent pas être tenus pour responsables de l'inefficience d'échelle.

- **L'efficacité est-elle le seul critère pour évaluer la performance d'une organisation ?**

Pas forcément (mais elle est certainement la plus complète, car elle met précisément en relation le rapport entre les *outputs* et les *inputs*). La manière d'évaluer la performance d'une organisation dépend des objectifs qui sont assignés au management. D'autres critères comme l'efficacité, la pertinence ou l'équité sont souvent utilisés avec l'efficacité. Dans ce cas, l'évaluation de la performance doit être pondérée en fonction des différents critères considérés.

- **Une organisation obtient un score d'efficacité de 100% tandis que toutes les autres organisations obtiennent des scores très bas (par exemple, de 40% ou moins). Est-ce réaliste ?**

Cela peut être réaliste, mais l'écart apparaît comme très (trop?) important. Dans un tel cas, les données doivent être contrôlées avec soin, et spécialement celles de l'organisation efficace. Si aucun problème n'est identifié au niveau des données, de tels résultats signifient que l'organisation efficace possède des processus radicalement différents de ceux des autres

organisations. Elle doit par conséquent impérativement être présentée comme un modèle de *best practice*. Cependant, même s'ils devaient s'avérer exacts, de tels résultats seraient certainement remis en question, pour ne pas dire rejeter, par les managers des organisations inefficientes. Ces managers seraient probablement découragés car ils considéreraient comme irréaliste d'améliorer l'efficacité de leurs propres organisations de 60% (ou plus) dans le court terme. Par conséquent, il est plus judicieux d'exclure l'organisation efficiente de l'échantillon et de mener une nouvelle analyse d'efficacité avec les organisations restantes. Même dans ce cas, l'organisation retirée de l'échantillon doit être présentée comme une *best practice*.

- **Presque toutes les organisations obtiennent un score d'efficacité de 100%. Cela signifie-t-il qu'elles sont réellement toutes efficaces ?**

Oui, cela peut signifier que toutes les organisations sont efficaces. Un tel résultat serait idéal. Mais il est improbable. Dans ce cas, le nombre total d'*inputs* et d'*outputs* est vraisemblablement trop élevé pour le nombre d'organisations présentes dans l'échantillon. Pour tester cette hypothèse, une variable (*output* ou *input*) doit être retirée avant de réaliser une nouvelle analyse d'efficacité. Si le nombre d'organisations obtenant un score de 100% se réduit, cela indique que le nombre de variables était trop élevé. Sinon, toutes les organisations sont simplement efficaces. Elles sont à féliciter.

- **Le modèle n'aboutit à aucun résultat. Qu'est-ce que cela signifie ?**

Cela peut arriver lorsque certaines données ont une valeur de zéro. Elles doivent par conséquent être contrôlées. Les zéros doivent être remplacés par une très petite valeur (0,01).

**Exercice 1**

Les bases de la méthode DEA sont testées dans le questionnaire à choix multiples ci-dessous. Une seule réponse est possible par question. Les solutions sont fournies à la fin de cet exercice.

1. Que permet de mesurer la méthode DEA ?
  - a) L'efficacité d'une entreprise
  - b) L'efficience d'une entreprise
  - c) Le bénéfice d'une entreprise
  - d) La productivité d'une entreprise
  
2. Les informations à disposition sur un échantillon d'organisations comprennent les quantités d'*inputs*, les coûts des *inputs* et les quantités d'*outputs*. Quel type d'efficience ne peut pas être mesuré ?
  - a) *Technical efficiency*
  - b) *Cost efficiency*
  - c) *Revenue efficiency*
  - d) *Scale efficiency*
  
3. L'efficience technique pure est :
  - a) Une mesure de la performance globale d'une organisation
  - b) L'efficience d'une organisation qui n'opère pas à la taille optimale
  - c) Une mesure de *profit efficiency*
  - d) L'efficience d'une organisation mal gérée
  
4. L'organisation A est inefficente. Qui sont ses pairs ?
  - a) Une ou plusieurs organisations qui ont des scores d'efficience moins élevés que celui de l'organisation A
  - b) Une ou plusieurs organisations qui ont des scores d'efficience plus élevés que celui de l'organisation A, mais qui ne sont pas situées sur la frontière d'efficience
  - c) N'importe quelle organisation située sur la frontière d'efficience
  - d) Une ou plusieurs organisations spécifiques situées sur la frontière d'efficience (autrement dit un sous-groupe d'organisations efficaces)

5. Une organisation produit des ordinateurs portables. Quel *input* contient une dimension qualitative ?
- a) Le nombre d'employés (en équivalents plein-temps) possédant un *master*
  - b) Le nombre total d'employés (en équivalents plein-temps), quel que soit leur niveau de formation
  - c) La surface totale de l'usine (en m<sup>2</sup>)
  - d) La consommation d'énergie
6. Une organisation se situe en déséconomies d'échelle. Comment le management peut-il améliorer son efficacité ?
- a) En fusionnant avec une autre organisation également en déséconomies d'échelle
  - b) En produisant plus d'*outputs*
  - c) En produisant moins d'*outputs*
  - d) En produisant la même quantité d'*outputs*
7. Un manager va mesurer l'efficacité en utilisant trois *inputs* et deux *outputs*. Combien d'organisations doit-il inclure au minimum dans son échantillon ?
- a) 10
  - b) 6
  - c) 15
  - d) Cela n'a aucune importance

Réponses correctes : 1b; 2c; 3d; 4d; 5a; 6c; 7c.

---

### 3 LOGICIEL DEA

#### 3.1 LOGICIELS EXISTANTS

Il existe de nombreux logiciels DEA orientés vers l'utilisateur qui permettent de calculer automatiquement les scores d'efficacité. Certains sont compatibles avec *Microsoft Excel* ©. Une revue de ces logiciels est disponible chez Barr (2004). Deux catégories de logiciels sont disponibles :

- les logiciels en libre accès comme *DEAP* (Timothy Coelli, Coelli Economic Consulting Services), *Win4DEAP* (Michel Deslièrres, University of Moncton), le « paquet » *Benchmarking* dans R (Peter Bogetoft, Copenhagen Business School, et Lars Otto, University of Copenhagen), *Efficiency Measurement System* (Holger Scheel, University of Dortmund) ou *DEA Solver Online* (Andreas Kleine et Günter Winterholer, University of Hohenheim) ;
- les logiciels commerciaux comme *DEA Frontier*<sup>13</sup> (Joe Zhu, Worcester Polytechnic Institute), *DEA-Solver PRO*<sup>14</sup> (Saitech, Inc.), *PIM-DEA* (Ali Emrouznejad, Aston Business School) ou *Frontier Analyst* (Banxia Software Ltd).

La présente section décrit les logiciels « jumeaux » *DEAP/Win4DEAP*<sup>15</sup> pour leur couverture des bases de la méthode DEA, leur simplicité d'usage et leur stabilité à travers le temps. Ils sont disponibles gratuitement<sup>16</sup> et contiennent de nombreux fichiers d'exemples. Comme

<sup>13</sup> Zhu (2003) inclut une version antérieure de *DEA Frontier*, *DEA Excel Solver*, sur un CD-ROM. Ce logiciel fonctionne uniquement avec *Excel* © 97, 2000 et 2003. Il permet de prendre en considération un nombre illimité d'organisations. Il est disponible à peu de frais, soit le prix du livre de Zhu (2003).

<sup>14</sup> Cooper et al. (2006) incluent un CD-ROM contenant une version limitée à 50 organisations de *DEA-Solver*. Il est disponible à peu de frais, soit le prix du livre de Cooper et al. (2006).

<sup>15</sup> Comme *DEAP* est un programme DOS, une version compatible avec Windows a été développée (*Win4DEAP*). Ces logiciels « jumeaux » doivent tous deux être téléchargés et décompressés dans le même dossier. *Win4DEAP* ne peut pas fonctionner sans *DEAP*.

<sup>16</sup> *DEAP Version 2.1*: <http://www.uq.edu.au/economics/cepa/deap.htm>  
*Win4DEAP Version 1.1.3*: [http://www8.umoncton.ca/umcm-deslièrres\\_michel/dea/install.html](http://www8.umoncton.ca/umcm-deslièrres_michel/dea/install.html)

*Win4DEAP* est l'interface Windows de *DEAP* (qui est un programme DOS), la présente section utilise uniquement le terme de *Win4DEAP*. Toutes les captures d'écran incluses dans cette section sont issues de *DEAP* et de *Win4DEAP*<sup>17</sup>.

### 3.2 CAS PRATIQUE 2

L'utilisation de *Win4DEAP* est décrite dans le cadre d'un cas pratique issu du domaine de l'éducation.

Le présent cas pratique traite de 15 écoles primaires. Elles produisent un *output* (nombre d'élèves) à l'aide de trois *inputs* (nombre d'enseignants en équivalents plein-temps, quantité de personnel administratif en équivalents plein-temps et nombre d'ordinateurs –ce dernier *input* étant utilisé comme une approximation de l'investissement dans les technologies de l'information et de la communication). Bien que les données présentées dans le Tableau 2 ci-dessous soient fictives, elles se rapprochent fortement d'une situation réelle. A titre d'illustration, l'école 8 forme 512 élèves avec 28,6 enseignants, 1,3 personnel administratif et 26 ordinateurs.

---

<sup>17</sup> Les captures d'écran sont reproduites avec l'autorisation des auteurs de *DEAP* (Timothy Coelli) et *Win4DEAP* (Michel Deslierres).

TABLEAU 2:

**Cas pratique 2 – En moyenne, chaque école forme 393,6 élèves avec 23,2 enseignants, 1,3 personnel administratif et 21,6 ordinateurs.**

Ecole	<i>Input</i>			<i>Output</i>
	Enseignants EPT	Personnel administratif EPT	Ordinateurs	Elèves
1	40.2	2.0	37.0	602.0
2	18.1	1.1	17.0	269.0
3	42.5	2.1	41.0	648.0
4	11.0	0.8	10.0	188.0
5	24.8	1.3	22.0	420.0
6	21.1	1.3	19.0	374.0
7	13.5	1.0	13.0	247.0
8	28.6	1.3	26.0	512.0
9	23.5	1.3	22.0	411.0
10	15.9	1.0	15.0	285.0
11	23.2	1.3	22.0	397.0
12	26.0	1.4	25.0	466.0
13	11.1	0.8	11.0	198.0
14	28.8	1.6	26.0	530.0
15	19.7	1.3	18.0	357.0

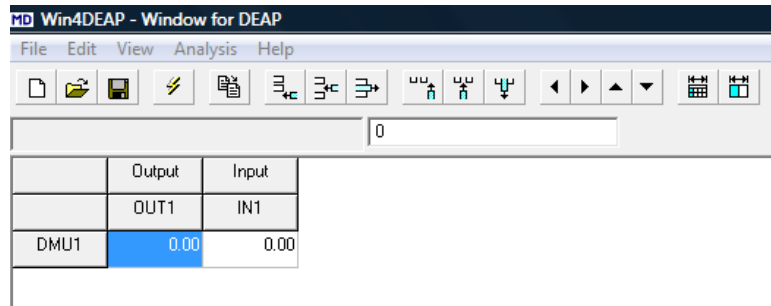
**a) Cas pratique 2 – Construire une feuille de calcul avec Win4DEAP**

Win4DEAP s'ouvre par un clic sur l'icône MD (**MD**). Les organisations (appelées *decision-making units* –DMUs–) figurent dans les lignes et les variables (*outputs* et *inputs*) dans les colonnes. La Figure 9 ci-dessous présente une nouvelle feuille de calcul. Elle contient par défaut une organisation (DMU1), un *output* (OUT1) et un *input* (IN1).



FIGURE 9:

Cas pratique 2 – Une nouvelle feuille de calcul contient une DMU, un *output* et un *input*.

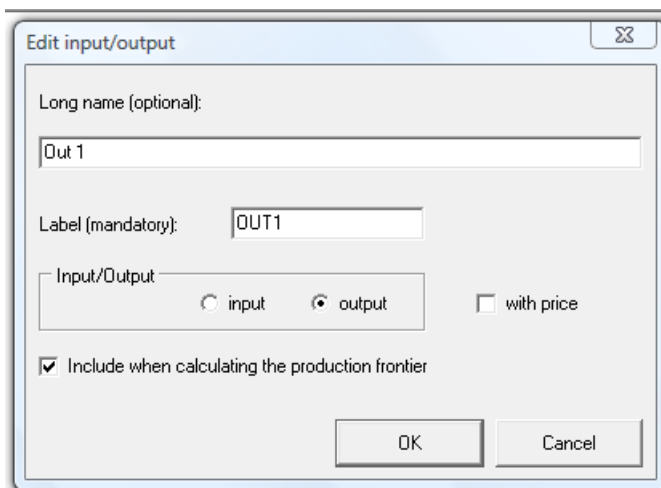












The screenshot shows the Win4DEAP software window. The title bar reads 'Win4DEAP - Window for DEAP'. Below the title bar is a menu bar with 'File', 'Edit', 'View', 'Analysis', and 'Help'. A toolbar with various icons is located below the menu bar. A search bar contains the number '0'. Below the search bar is a table with the following data:

	Output	Input
	OUT1	IN1
DMU1	0.00	0.00

Pour caractériser les organisations, les *outputs* et les *inputs*, l'utilisateur doit cliquer respectivement sur DMU1 (<sup>DMU1</sup>), OUT1 (<sup>OUT1</sup>) et IN1 (<sup>IN1</sup>). La fenêtre reproduite dans la Figure 10 permet (1) de nommer chaque variable à l'aide d'un nom complet (*Long name*) et d'une abréviation –huit caractères au maximum– (*Label*) et (2) de sélectionner la nature de chaque variable (*input* ou *output*). Enfin, l'utilisateur peut choisir l'option « avec prix » (*with price*) s'il souhaite mesurer la *cost*, *price* ou *revenue efficiency*. Dans ce cas, une colonne est automatiquement ajoutée à côté de la variable concernée dans la feuille de calcul. Elle permet de saisir l'information sur le prix.

FIGURE 10:  
Cas pratique 2 – Les *inputs* et des *outputs* sont à caractériser.



Les icônes   permettent d'ajouter des organisations (DMUs). Les icônes   permettent d'ajouter des variables (*inputs* ou *outputs*). Les icônes  et  sont utilisés pour supprimer des DMUs ou des variables existantes. Enfin, les icônes     permettent d'inverser l'ordre d'apparition des variables (dans les colonnes) et des DMUs (dans les lignes).

**Comment importer dans Win4DEAP des données à partir de Microsoft Excel ©**

Les données *Excel* © peuvent être importées dans *Win4DEAP* en respectant les étapes suivantes :

- enregistrement des données *Microsoft Excel* © (uniquement des nombres, sans aucun nom de DMUs ou de variables) dans le format CSV (séparateur : point-virgule) ;
- dans *Win4DEAP*, sélection du menu « *File* », puis de l'option « *Import* » et enfin de l'application « *New data set* » ;
- sélection et ouverture du fichier CSV (séparateur ; point-virgule) ;
- les données apparaissent dans *Win4DEAP* ; la feuille de calcul demeure à configurer (caractérisation des DMUs et des variables).

---

**Exercice 2**

L'objectif de cet exercice consiste à calibrer correctement une feuille de calcul dans *Win4DEAP*.

**Tâches à effectuer**

- a) Préparation d'une feuille de calcul dans *Win4DEAP* incluant 15 organisations, 3 *inputs* et un *output*. Les organisations sont à nommer « *Ecole 1* », « *Ecole 2* », etc. Le premier *input* est « *Enseignants EPT* », le second « *Personnel administratif EPT* » et le troisième « *Ordinateurs* ». L'*output* correspond au nombre d'élèves.
- b) Les données du Tableau 2 sont à reporter dans la feuille de calcul.
- c) Le fichier est à sauvegarder dans le même dossier qui contient *DEAP/Win4DEAP* (menu « *File* », option « *Save as* »).

*Réponse : La feuille de calcul doit être similaire à celle représentée à la Figure 11.*

FIGURE 11:  
Cas pratique 2 – Une feuille de calcul *Win4DEAP* prête à l'emploi.

The screenshot shows the Win4DEAP software window. The title bar reads 'Win4DEAP - Window for DEAP'. The menu bar includes 'File', 'Edit', 'View', 'Analysis', and 'Help'. The toolbar contains various icons for file operations and analysis. Below the toolbar, there is a text box containing '40.2' and a label 'SCHOOL1, TEACHERS'. The main area displays a spreadsheet with the following data:

	Input	Input	Input	Output
	TEACHERS	ADMIN	COMPUTER	PUPILS
SCHOOL1	40.20	2.00	37.00	602.00
SCHOOL2	18.10	1.10	17.00	269.00
SCHOOL3	42.50	2.10	41.00	648.00
SCHOOL4	11.00	0.80	10.00	188.00
SCHOOL5	24.80	1.30	22.00	420.00
SCHOOL6	21.10	1.30	19.00	374.00
SCHOOL7	13.50	1.00	13.00	247.00
SCHOOL8	28.60	1.30	26.00	512.00
SCHOOL9	23.50	1.30	22.00	411.00
SCHOOL10	15.90	1.00	15.00	285.00
SCHOOL11	23.20	1.30	22.00	397.00
SCHOOL12	26.00	1.40	25.00	466.00
SCHOOL13	11.10	0.80	11.00	198.00
SCHOOL14	28.80	1.60	26.00	530.00
SCHOOL15	19.70	1.30	18.00	357.00

## b) Cas pratique 2 – Exécuter un modèle DEA

Pour exécuter un modèle DEA, l'utilisateur clique sur l'icône représentant un éclair (⚡). La fenêtre reproduite dans la Figure 12 apparaît alors. Cette fenêtre permet de calibrer le modèle DEA en suivant les quatre points décrits ci-dessous :

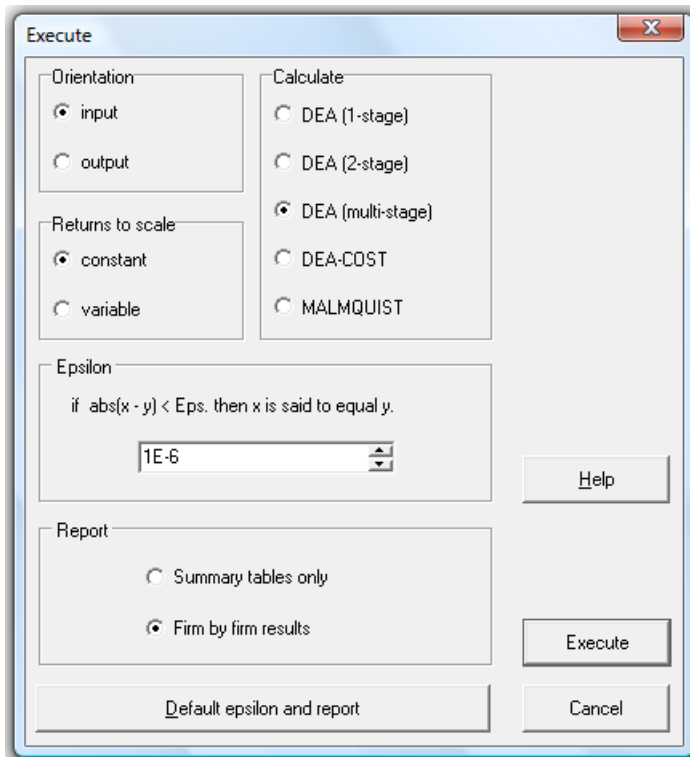
1. Choix entre une orientation « *input* » ou « *output* » (*Orientation box*).
2. Sélection de l'hypothèse sur les rendements d'échelle (*Returns to scale box*) : cliquer sur « *constant* » pour des rendements d'échelles

constants (CRS) ou sur « *variable* » pour des rendements d'échelle variables (VRS). Si l'utilisateur n'est pas certain que les organisations opèrent à leur taille optimale, il est recommandé de choisir un modèle VRS.

3. Sélection d'un modèle (*Calculate box*). Trois options principales sont disponibles :
  - « *DEA (multi-stage)* » pour calculer l'efficacité technique (TE) dans un modèle CRS ou l'efficacité technique totale, pure et d'échelle dans un modèle VRS ; les options « *DEA (1-stage)* », « *DEA (2-stage)* » et « *DEA (multi-stage)* » correspondent à un traitement différencié des *slacks* ; en suivant Coelli (1998), le traitement *multi-stage* est recommandé.
  - « *DEA-COST* » pour calculer la *cost*, *revenue* ou *profit efficiency* ; dans cette option, l'information concernant les coûts des *inputs* et les prix des *outputs* doit être disponible et ajoutée dans la feuille de calcul.
  - « *MALMQUIST* » pour calculer l'efficacité technique et d'échelle lorsque des séries temporelles sont disponibles (cf. Section 5.4).
4. Choix de la publication des résultats : résumé uniquement (« *summary tables only* ») ou organisation par organisation (« *Firm by firm results* ») (*Report box*).
5. Exécution du modèle en cliquant sur « *Execute* ».

FIGURE 12:

Cas pratique 2 – Le cockpit de *Win4DEAP* permet de calibrer le modèle.



### Exercice 3

L'objectif de cet exercice consiste à exécuter un modèle DEA, basé sur le cas pratique 2, avec *Win4DEAP*. Les informations suivantes sont connues :

- les écoles évoluent dans un contexte général de restriction budgétaire ;
- le système éducatif est fortement régulé ;
- un rapport présentant les résultats de l'analyse d'efficacité pour chaque école est attendu.

## Prérequis

### Exercice 2

#### Tâches à effectuer

- Ouverture de la feuille de calcul calibrée dans l'exercice 2 et contenant les données des 15 écoles primaires
- Calibration adéquate du modèle
- Exécution du modèle

*Réponse : Le cockpit de calibration du modèle doit être similaire à celui représenté à la Figure 13.*

FIGURE 13:

Cas pratique 2 – Un modèle VRS orienté input prêt à être exécuté.

The image shows a software dialog box titled "Execute". It contains the following settings:

- Orientation:**  input,  output
- Returns to scale:**  constant,  variable
- Calculate:**  DEA (1-stage),  DEA (2-stage),  DEA (multi-stage),  DEA-COST,  MALMQUIST
- Epsilon:** if  $\text{abs}(x - y) < \text{Eps}$ , then  $x$  is said to equal  $y$ . The value is set to 1E-6 in a spinner box.
- Report:**  Summary tables only,  Firm by firm results

Buttons: Help, Execute, Cancel, and a button labeled "Default epsilon and report" at the bottom.

### c) Cas pratique 2 – Interpréter les résultats

Après avoir exécuté le modèle DEA, une fenêtre contenant les coordonnées du Prof. Timothy Coelli, le développeur de *DEAP*, apparaît. La fermeture de cette fenêtre permet d'accéder aux résultats. Il est recommandé à l'utilisateur de naviguer dans ces résultats pour devenir familier avec leur contenu. Un nombre limité de tableaux de résultats est commenté en détail dans la présente section. Le Tableau 3 ci-dessous contient en outre une liste des abréviations qui sont utilisées dans le fichier de résultats.

**TABLEAU 3:**  
**Cas pratique 2 – Les abréviations utilisées dans le fichier des résultats et leur signification permettent de comprendre les résultats du modèle.**

Acronyme	Signification
DEA	Data Envelopment Analysis
CRS	Constant Returns to Scale
VRS	Variable Returns to Scale
TE	Technical Efficiency
CRSTE	Constant Returns to Scale Technical Efficiency
VRSTE	Variable Returns to Scale Technical Efficiency
SE	Scale Efficiency
IRS	Increasing Returns to Scale
DRS	Decreasing Returns to Scale

La Figure 14 représente le premier tableau à être commenté. Elle est issue du fichier de résultats et contient un résumé de l'analyse d'efficacité. La première colonne liste les 15 écoles, identifiées par les numéros 1 à 15. La deuxième colonne contient les scores d'efficacité sous hypothèse de rendements d'échelle constants (CRSTE)<sup>18</sup>, qui correspond aussi à l'efficacité totale. Cette efficacité totale est décomposée en une mesure d'efficacité pure (efficacité sous hypothèse de rendements d'échelle variable –VRSTE– dans la troisième colonne) et en une mesure d'efficacité d'échelle (SCALE dans la quatrième

<sup>18</sup> Si l'utilisateur exécute un modèle CRS à la place d'un VRS, il obtient un seul type de scores d'efficacité dans son fichier de résultats (technical efficiency –TE). Ces scores d'efficacité technique sont identiques à ceux qui figurent dans la colonne CRSTE du fichier de résultats du modèle VRS.



colonne). La dernière colonne indique le type de rendements d'échelle (IRS, DRS ou un tiret) :

- les organisations associées avec IRS évoluent dans une situation de rendements d'échelle croissants (économies d'échelle) ;
- les organisations associées avec DRS évoluent dans une situation de rendements d'échelle décroissants (déséconomies d'échelle) ;
- les organisations associées avec un tiret évoluent dans une situation de rendements d'échelle constants ; elles opèrent à leur taille optimale.

En moyenne, les écoles obtiennent les scores d'efficience suivants :

- 94% pour CRSTE ; au total, les écoles peuvent réduire tous leurs *inputs* de 6% tout en formant le même nombre d'élèves.
- 97,5% pour VRSTE ; une meilleure gestion des écoles permet de réduire la consommation d'*inputs* de 2,5% tout en formant le même nombre d'élèves.
- 96,4% pour SCALE ; en ajustant leur taille, les écoles peuvent réduire leurs *inputs* de 3,6% tout en formant le même nombre d'élèves.

FIGURE 14:

Cas pratique 2 – L'efficacité technique totale (CRSTE) est décomposée en efficacité technique pure (VRSTE) et en efficacité d'échelle (SE).

## EFFICIENCY SUMMARY:

firm	crste	vrste	scale	
1	0.827	0.951	0.869	drs
2	0.808	0.838	0.964	irs
3	0.842	1.000	0.842	drs
4	0.929	1.000	0.929	irs
5	0.943	0.962	0.981	irs
6	0.966	0.984	0.981	irs
7	0.994	1.000	0.994	irs
8	1.000	1.000	1.000	-
9	0.951	0.963	0.987	irs
10	0.974	0.995	0.978	irs
11	0.930	0.943	0.986	irs
12	0.978	0.984	0.994	irs
13	0.969	1.000	0.969	irs
14	1.000	1.000	1.000	-
15	0.985	0.998	0.987	irs
mean	0.940	0.975	0.964	

Note: crste = technical efficiency from CRS DEA

vrste = technical efficiency from VRS DEA

scale = scale efficiency = crste/vrste

Note also that all subsequent tables refer to VRS results

Dans le fichier de résultats, tous les tableaux présentant les situations individuelles des écoles font référence à l'efficacité pure (VRSTE). Les potentiels d'amélioration sont par conséquent calculés en fonction du score d'efficacité technique pure (et ne tiennent pas compte de l'efficacité d'échelle). Ces tableaux contiennent les informations suivantes :

- le numéro de l'organisation (en l'occurrence l'école) sous revue (« *Results for firm* ») ;
- le score d'efficacité technique (« *Technical efficiency* »), qui correspond à VRSTE dans le cas d'un modèle VRS (ou à CRSTE dans le cas d'un modèle CRS) ;

- le score d'efficacité d'échelle (« *Scale efficiency* ») ; relevons que le SE apparaît uniquement dans le cas d'un modèle VRS ;
- les lignes de la matrice représentent les *outputs* et les *inputs* du modèle (« *output 1* », « *output 2* », etc. ; « *input 1* », « *input 2* », etc. ;
- la première colonne de la matrice rappelle les valeurs d'origine des variables –*outputs* et *inputs*– (« *original value* ») ;
- la seconde colonne de la matrice contient les mouvements que les organisations inefficaces doivent effectuer pour se situer sur la frontière d'efficacité (« *radial movement* ») ;
- la troisième colonne de la matrice représente les mouvements additionnels que les organisations situées sur un segment de la frontière parallèle aux axes doivent effectuer pour devenir efficaces (« *slack movement* ») ;
- la quatrième colonne de la matrice contient les valeurs des variables qui permettent aux organisations d'être efficaces (« *projected value* ») ; ces valeurs projetées prennent en compte non seulement les mouvements radiaux mais également les mouvements *slacks* ;
- finalement, les paires sont listées ; chaque paire est identifiée par son numéro ; un poids (« *lambda weight* ») est associé à chaque paire ; ce poids représente l'importance relative du paire.

A titre d'illustrations, les tableaux des résultats individuels de trois écoles sont spécifiquement commentés ci-dessous (Ecole 1 (cf. Figure 15), 2 (cf. Figure 16) et 3 (cf. Figure 17).

L'école 1 (cf. Figure 15) a une efficacité pure de 95,1% et une efficacité d'échelle de 86,9%. Elle évolue dans une situation de rendements d'échelle décroissants (DRS). En améliorant la manière dont l'école est gérée, 4,9% (100 - 95,1) des *inputs* peuvent être économisés. En ajustant la taille de l'école, la consommation d'*inputs* peut être réduite de 13,1% (100 - 86,9).

Les valeurs d'origine des variables de l'école sont rappelées dans le tableau : l'école 1 forme 602 élèves avec 40,2 enseignants, 2 personnels administratifs et 37 ordinateurs. Cependant, l'école 1 pourrait produire

la même quantité d'*outputs* avec moins d'*inputs* : 37,186 enseignants à la place de 40,2 ; 1,902 personnel administratif à la place de 2 ; 35,185 ordinateurs à la place de 37 (cf. colonne « *projected value* »). La réduction des *inputs* 2 et 3 équivaut bien à 4,9 % des valeurs d'origine :  $(- 0,098 / 2) \times 100$  pour l'*input* 2 et  $(- 1,815 / 37) \times 100$  pour l'*input* 3<sup>19</sup>. Le cas de l'*input* 1 est légèrement différent : pour que l'école soit efficiente, cet *input* doit non seulement être réduit de 1,972 enseignant (colonne « *radial movement* », soit 4,9%) mais également de 1,042 enseignant additionnel (colonne « *slack movement* », soit 2,6%). Au total, l'école 1 doit réduire l'*input* 1 de 3,014 enseignants  $[(- 1,972) + (- 1,042)]$  pour être efficiente. Cela représente 7,5 % :  $[(- 3,014/40,2) \times 100]$ .

Pour améliorer sa performance, l'école 1 doit analyser les pratiques des écoles 3, 14 et 8, qui sont identifiées comme ses pairs de référence. Pour être un pair (ou un *benchmark*), une organisation doit avoir une efficience pure de 100%. Le poids lambda associé à chaque pair correspond à l'importance relative de ce pair au sein du groupe de pairs identifiés. Idéalement, l'école 1 devrait analyser les *best practice* d'une école virtuelle formée par 61,2% de l'école 3, de 37,3% de l'école 14 et de 1,4% de l'école 8. Comme une telle école virtuelle n'existe pas, l'école 1 devrait concentrer son analyse de *best practice* sur l'école présentant la valeur lambda la plus élevée (autrement dit l'école 3).

---

<sup>19</sup> Dans un modèle VRS, le potentiel d'amélioration sur les variables (diminution des *inputs* ou augmentation des *outputs* indiqués dans la colonne « *projected value* ») est calculé uniquement en fonction du score d'efficience technique VRS. Il ne tient par conséquent pas compte de l'efficience d'échelle. Dans un modèle CRS, il est calculé en fonction du score d'efficience technique CRS (score TE), qui inclut non seulement l'efficience pure mais également l'efficience d'échelle.

FIGURE 15:

Cas pratique 2 – L'école 1 pourrait former 602 élèves avec 37,186 enseignants, 1,902 personnel administratif et 35,185 ordinateurs.

```

Results For firm:      1
Technical efficiency = 0.951
Scale efficiency      = 0.869 (drs)
PROJECTION SUMMARY:
variable             original      radial      slack      projected
                    value         movement  movement  value
output  1            602.000      0.000      0.000      602.000
input   1            40.200      -1.972     -1.042     37.186
input   2             2.000      -0.098      0.000      1.902
input   3            37.000     -1.815      0.000      35.185
LISTING OF PEERS:
peer  lambda weight
  3    0.612
 14    0.373
  8    0.014

```

L'école 2 (cf. Figure 16) a une efficacité pure de 83,8% et une efficacité d'échelle de 96,4%. Elle évolue dans une situation de rendements d'échelle croissants (IRS). En améliorant la manière dont l'école est gérée, 16,2% (100 - 83,8) des *inputs* peuvent être économisés. En ajustant la taille de l'école, la consommation d'*inputs* peut être réduite de 3,6% (100 - 96,4).

Les valeurs d'origine des variables de l'école sont rappelées dans le tableau : l'école 2 forme 269 élèves avec 18,1 enseignants, 1,1 personnel administratif et 17 ordinateurs. Cependant, l'école 2 pourrait produire la même quantité d'*outputs* avec moins d'*inputs* : 15,163 enseignants à la place de 18,1 ; 0,922 personnel administratif à la place de 1,1 ; 14,242 ordinateurs à la place de 17 (cf. colonne « *projected value* »). La réduction des *inputs* 1, 2 et 3 équivaut à 16,2% des valeurs d'origine (colonne « *radial movement* »). Aucun *slack* n'est identifié.

Pour améliorer sa performance, l'école 2 doit analyser les pratiques des écoles 13 (50,6%), 4 (26,1%), 14 (1,6%) et 8 (21,8%).

FIGURE 16:

## Cas pratique 2 – Quatre pairs sont identifiés pour l'école 2.

```

Results for firm:      2
Technical efficiency = 0.838
Scale efficiency      = 0.964 (irs)
PROJECTION SUMMARY:
  variable            original      radial      slack      projected
                    value          movement  movement  value
output 1             269.000      0.000      0.000     269.000
input 1              18.100     -2.937      0.000     15.163
input 2              1.100     -0.178      0.000     0.922
input 3             17.000     -2.758      0.000     14.242
LISTING OF PEERS:
peer  lambda weight
 13    0.506
  4    0.261
 14    0.016
  8    0.218

```

L'école 3 (cf. Figure 17) a une efficacité pure de 100% et une efficacité d'échelle de 84,2%. Elle évolue dans une situation de rendements d'échelle décroissants (DRS). Cette école est bien gérée. Elle ne peut pas améliorer son efficacité pure. La marge d'amélioration se situe dans un ajustement de sa taille : en la réduisant, l'école 3 peut économiser 15,8% (100 - 84,2) des *inputs*.

Les valeurs d'origine de l'école sont rappelées dans le tableau : l'école 3 forme 648 élèves avec 42,5 enseignants, 2,1 personnels administratifs et 41 ordinateurs. Ces valeurs sont égales aux valeurs projetées, car le score d'efficacité pure est de 100%<sup>20</sup>.

Comme l'école 3 a un score d'efficacité pure de 100%, aucun pair de référence n'est identifié.

<sup>20</sup> Pour rappel, les valeurs projetées sont calculées en fonction de l'efficacité pure, et non de l'efficacité d'échelle.

FIGURE 17:

Cas pratique 2 – L'école 3 peut réduire ses *inputs* en modifiant sa taille à la baisse.

```

Results for firm:      3
Technical efficiency = 1.000
Scale efficiency      = 0.842 (drs)
PROJECTION SUMMARY:
  variable            original      radial      slack      projected
                    value          movement  movement  value
output      1         648.000      0.000      0.000      648.000
input       1         42.500      0.000      0.000      42.500
input       2          2.100      0.000      0.000      2.100
input       3          41.000      0.000      0.000      41.000
LISTING OF PEERS:
peer        lambda weight
3           1.000

```

#### Exercice 4

L'objectif de cet exercice consiste à interpréter les résultats d'un modèle DEA. La Figure 18 ci-dessous présente les résultats de l'une des 15 écoles. Elle a été volontairement tronquée pour que le score d'efficacité technique pure (VRSTE) n'y apparaisse pas.

#### Tâches à effectuer

Répondre aux questions suivantes :

- a) Le score d'efficacité technique sous hypothèse de rendements d'échelle variables (VRSTE) n'apparaît pas dans le tableau. A combien s'élève-t-il ?

*Réponse : Il existe plusieurs possibilités de calculer le score d'efficacité pure. Par exemple, l'input 1 doit être réduit de 0,864 (radial movement). Cela représente 3,7%  $[( - 0.864 / 23.5) \times 100]$ . En conséquence, VRSTE correspond à 96,3%  $(100 - 3,7)$ . Le même résultat est obtenu en basant le calcul sur l'input 2. En partant de l'input 3, il faut veiller à ne pas prendre en compte le mouvement slack dans le calcul, mais uniquement le mouvement radial.*

- b) Faisons l'hypothèse que le score d'efficacité pure s'élève à 96,3%. Où se situe la source d'amélioration de la performance la plus élevée : dans la gestion de l'école ou dans sa taille ?

*Réponse : La marge d'amélioration liée à la gestion de l'école est de*

3,7% (100 - 96,3). Celle liée à la taille de l'école s'élève à 1,3% (100 - 98,7). Par conséquent, la source d'amélioration la plus importante se situe au niveau de la gestion.

- c) Si l'école sous revue n'avait le temps d'analyser les pratiques que d'un seul de ses pairs, lequel devrait-elle choisir ?

Réponse : L'école 14. Parmi les trois pairs identifiés, (13, 14 et 8), l'école 14 est associée avec le poids le plus élevé (41,7%).

- d) De combien d'unités l'école doit-elle réduire son troisième *input* pour être totalement efficiente ?

Réponse : de 1.184 [(- 0.809) + (- 0.375)].

FIGURE 18:

Cas pratique 2 – Un tableau des résultats d'efficience aide une organisation à prendre ses décisions sur une base objectivée.

Scale efficiency		= 0.987 (irs)			
PROJECTION SUMMARY:					
variable		original value	radial movement	slack movement	projected value
output	1	411.000	0.000	0.000	411.000
input	1	23.500	-0.864	0.000	22.636
input	2	1.300	-0.048	0.000	1.252
input	3	22.000	-0.809	-0.375	20.817
LISTING OF PEERS:					
peer	lambda	weight			
13	0.346				
14	0.417				
8	0.238				



## 4 MODELES MATHEMATIQUES DE LA METHODE DEA

La présente section décrit les deux principaux modèles DEA : le modèle sous hypothèse de rendements d'échelle constants (Charnes *et al.*, 1978) et le modèle sous hypothèse de rendements d'échelle variables (Banker *et al.*, 1984). La méthode DEA se fonde sur les travaux antérieurs de Dantzig (1951) et de Farrell (1957), dont l'approche adopte une orientation *input*. Zhu et Cook (2008), Cooper *et al.* (2007) ou Coelli *et al.* (2005) fournissent une description exhaustive de la méthodologie. Depuis son introduction, la méthode DEA a connu un succès exponentiel : en 2007, Emrouznejad *et al.* (2008) identifiaient plus de 4000 articles de recherche publiés sur la méthode DEA dans des journaux scientifiques ou des ouvrages de référence.

La méthode DEA est une méthode non-paramétrique. Contrairement aux méthodes paramétriques (comme celles des moindres carrés ordinaires, du maximum de vraisemblance ou de l'analyse de frontière stochastique), les *inputs* et les *outputs* sont utilisés pour calculer, à l'aide de la programmation linéaire, une enveloppe représentant la frontière d'efficacité. Par conséquent, une méthode non-paramétrique ne requiert pas la spécification d'une forme fonctionnelle.

### 4.1 RENDEMENTS D'ECHELLE CONSTANTS

Charnes *et al.* (1978) ont développé un modèle faisant l'hypothèse de rendements d'échelle constants (modèle CRS)<sup>21</sup>. Il est approprié lorsque toutes les organisations opèrent à leur taille optimale. La notion d'efficacité est définie par Charnes *et al.* (1978, p. 430) comme étant la valeur maximale du ratio « *outputs* pondérés par *inputs* pondérés », sous contrainte que les ratios similaires pour chaque organisation soit

---

<sup>21</sup> Ce modèle est également connu sous le nom de « modèle Charnes, Cooper & Rhodes » (modèle CCR).

inférieurs ou égaux à l'unité. En suivant la notation retenue par Johnes (2004), l'efficacité correspond à :

$$TE_k = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \quad (1)$$

Où :

$TE_k$  est l'efficacité technique de l'organisation  $k$  utilisant  $m$  *inputs* pour produire  $s$  *outputs* ;

$y_{rk}$  est la quantité de l'*output*  $r$  produit par l'organisation  $k$  ;

$x_{ik}$  est la quantité de l'*input*  $i$  consommé par l'organisation  $k$  ;

$u_r$  est le poids de l'*output*  $r$  ;

$v_i$  est le poids de l'*input*  $i$  ;

$n$  est le nombre d'organisations à être évaluées ;

$s$  est le nombre d'*outputs* ;

$m$  est le nombre d'*inputs*.

L'efficacité technique de l'organisation  $k$  est maximisée en fonction de deux contraintes. Premièrement, les poids appliqués aux *outputs* et aux *inputs* de l'organisation  $k$  ne peuvent pas générer un score d'efficacité supérieur à 1 lorsqu'ils sont appliqués à chaque organisation de l'échantillon (équation 3). Deuxièmement, les poids appliqués aux *outputs* et aux *inputs* sont strictement positifs (équation 4). Le problème de programmation linéaire suivant doit être résolu pour chaque organisation :

$$\text{Maximiser } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \quad (2)$$

$$\text{Sous contraintes } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$u_r, v_i > 0 \quad \forall r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m \quad (4)$$

Ce problème de programmation linéaire peut être résolu selon deux approches. Dans la première, la somme pondérée des *outputs* est maximisée tout en maintenant constants les *inputs* (modèle orienté vers les *outputs*). Dans la deuxième, la somme pondérée des *inputs* est minimisée en maintenant les *outputs* constants (modèle orienté vers les *inputs*)<sup>22</sup>. Les équations primales de chacun de ces deux modèles sont fournies ci-dessous. Elles représentent la « forme multiplicateur » du problème à résoudre.

<b>Modèle CRS, orientation output</b>	<b>Modèle CRS, orientation input</b>
<b>Équation primale</b>	<b>Équation primale</b>
Minimiser $\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}$ (5)	Maximiser $\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}$ (9)
Sous contraintes	Sous contraintes
$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$ (6)	$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$ (10)
$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1$ (7)	$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$ (11)
$u_r, v_i > 0 \quad \forall r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m$ (8)	$u_r, v_i > 0 \quad \forall r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m$ (12)

<sup>22</sup> Relevons que les expressions « orientation input » et « orientation output » sont dérivées des équations duales de chacun des modèles (et non des équations primales).

En utilisant la dualité dans la programmation linéaire, une forme équivalente, appelée la « forme enveloppe », peut être dérivée de ce problème. La « forme enveloppe » est souvent privilégiée en programmation informatique car elle contient seulement  $s+m$  contraintes plutôt que les  $n+1$  contraintes de la « forme multiplicateur ».

Modèle CRS, orientation <i>output</i> Équation duale		Modèle CRS, orientation <i>input</i> Équation duale	
Maximiser $\phi_k$	(13)	Minimiser $\theta_k$	(17)
Sous contraintes		Sous contraintes	
$\phi_k y_{rk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq 0 \quad r=1, \dots, s$	(14)	$y_{rk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq 0 \quad r=1, \dots, s$	(18)
$x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \geq 0 \quad i=1, \dots, m$	(15)	$\theta_k x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \geq 0 \quad i=1, \dots, m$	(19)
$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$	(16)	$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$	(20)

Où :

$\frac{1}{\phi_k}$  et  $\theta_k$  représentent l'efficacité technique de l'organisation  $k$  ;

$\lambda_j$  représente le poids associé aux *outputs* et aux *inputs* de l'organisation  $j$ .

La position de chaque organisation située sur les segments de l'enveloppe qui sont parallèles aux axes doit être ajustée pour tenir compte des *slacks* (*outputs* et *inputs*). Les formulations duales précédentes n'intègrent cependant pas le rôle des *slacks* dans la mesure de l'efficacité. En considérant  $s_r$  comme représentant les *outputs slacks* et  $s_i$  les *inputs slacks*, les équations correspondantes deviennent :

<b>Modèle CRS, orientation <i>output</i></b> <b>Équation duale avec <i>slacks</i></b>	<b>Modèle CRS, orientation <i>input</i></b> <b>Équation duale avec <i>slacks</i></b>
Maximiser $\phi_k + \varepsilon \sum_{r=1}^s s_r + \varepsilon \sum_{i=1}^m s_i$ (21)	Minimiser $\theta_k - \varepsilon \sum_{r=1}^s s_r - \varepsilon \sum_{i=1}^m s_i$ (25)
Sous contraintes	Sous contraintes
$\phi_k y_{rk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + s_r = 0 \quad r = 1, \dots, s$ (22)	$y_{rk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + s_r = 0 \quad r = 1, \dots, s$ (26)
$x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$ (23)	$\theta_k x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$ (27)
$\lambda_j, s_r, s_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n; r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m$ (24)	$\lambda_j, s_r, s_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n; r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m$ (28)

Dans les équations 21 et 25,  $\varepsilon$  est une valeur non archimédienne se définissant comme une valeur plus petite que n'importe quel nombre réel positif.  $\varepsilon$  est ainsi supérieur à 0. L'organisation  $k$  est efficiente si et seulement si :

- le score d'efficience  $TE_k = \left( \frac{1}{\phi_k} \right) = 1$  (ou  $TE_k = \theta_k = 1$ ) ;
- et les *slacks*  $s_r, s_i = 0, \forall_r = 1, \dots, s$  et  $i = 1, \dots, m$ .

Pour une présentation approfondie du traitement des *slacks* dans la méthode DEA, et notamment leur traitement *multi-stage*, le lecteur se référera à Coelli (1998).

#### 4.2 RENDEMENTS D'ECHELLE VARIABLES

Banker *et al.* (1984) ont développé un modèle faisant l'hypothèse de rendements d'échelle variables (modèle VRS)<sup>23</sup>. Il est approprié lorsque toutes les organisations n'opèrent pas à leur taille optimale. Comme Coelli *et al.* (2005, p. 172) le soulignent, l'utilisation du modèle CRS, lorsque toutes les organisations n'ont pas atteint leur taille optimale, aboutit en la mesure d'une efficacité technique qui englobe l'efficacité d'échelle. L'utilisation du modèle VRS permet précisément de calculer l'efficacité technique dépourvue de l'effet d'échelle.

Pour intégrer l'hypothèse de rendements d'échelle variables, le modèle CRS est modifié en assouplissant l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Pour ce faire, une mesure de rendements d'échelle est ajoutée dans l'équation primale pour l'organisation  $k$  (ou la contrainte de

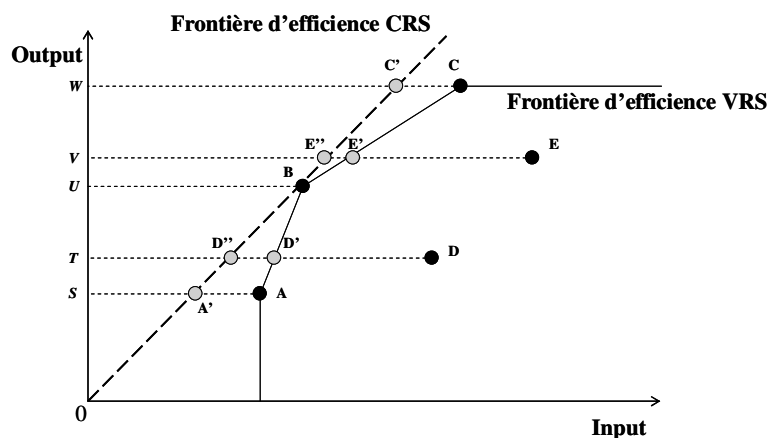
convexité  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  dans l'équation duale).

La Figure 19 représente sur le même graphique la frontière d'efficacité CRS (trait tillé) et la frontière d'efficacité VRS (ligne continue) dans le cas d'un exemple simple avec un *output* et un *input*. Une seule organisation, B, est située sur les deux frontières. A et C sont 100% efficaces sous hypothèse de rendements d'échelle variables, mais inefficaces sous hypothèse de rendements d'échelle constants. D et E sont inefficaces sous les deux hypothèses.

---

<sup>23</sup> Ce modèle est également connu sous le nom de « modèle Banker, Charnes & Cooper » (modèle BCC).

FIGURE 19:  
La distance entre la frontière VRS et la frontière CRS correspond à l'efficacité d'échelle.



La situation spécifique de l'organisation D est commentée ci-dessous :

- L'organisation D est inefficace sous hypothèses de rendements d'échelle variables et constants. Autrement dit, elle est VRS et CRS inefficace. Pour devenir VRS efficace, elle doit se déplacer du point D au point D'. D' est situé sur la frontière d'efficacité VRS. L'inefficacité technique VRS du point D, en orientation *input*, correspond à la distance DD'. Pour devenir CRS efficace, l'organisation D doit effectuer un mouvement supplémentaire : du point D' au point D''. D'' est situé sur la frontière d'efficacité CRS. L'inefficacité technique CRS du point D, en orientation *input*, correspond à la distance DD''. La distance entre D' et D'' correspond quant à elle à l'inefficacité d'échelle. Les mesures de ces différentes efficacités (VRS, CRS et d'échelle), exprimées sous la forme de ratios compris entre zéro et un, sont les suivantes :

Efficiace technique de D sous hypothèse CRS	Efficiace technique de D sous hypothèse VRS	Efficiace d'échelle de D
$TE_{CRS} = \frac{TD''}{TD}$	$TE_{VRS} = \frac{TD'}{TD}$	$SE = \frac{TD''}{TD'}$

### Exercice 5

L'objectif de cet exercice consiste (1) à commenter en détails les situations des organisations E, A, B et C représentées dans la Figure 19 (comme cela est réalisé ci-dessus pour l'organisation D) et (2) à fournir les ratios de  $TE_{CRS}$ ,  $TE_{VRS}$  et SE pour ces mêmes organisations.

*Réponse pour l'organisation E :*

*L'organisation E est VRS et CRS inefficace. Pour devenir VRS efficace, elle doit se déplacer jusqu'au point E'. L'inefficacité technique VRS du point E, en orientation input, correspond à la distance EE'. Pour devenir CRS efficace, elle doit se déplacer jusqu'au point E''. L'inefficacité technique CRS du point E, en orientation input, correspond à la distance EE''. La différence entre ces deux distances, soit E'E'', correspond à l'inefficacité d'échelle. Les mesures d'efficacité sous la forme de ratios, compris entre zéro et un, figurent ci-dessous.*

<i>Efficiency technique de E sous hypothèse CRS</i>	<i>Efficiency technique de E sous hypothèse VRS</i>	<i>Efficiency d'échelle de E</i>
$TE_{CRS} = \frac{VE''}{VE}$	$TE_{VRS} = \frac{VE'}{VE}$	$SE = \frac{VE''}{VE'}$

*Réponse pour l'organisation A :*

*L'organisation A est VRS efficace mais CRS inefficace. Pour devenir CRS efficace, elle doit se déplacer jusqu'au point A'. L'inefficacité technique CRS du point A, en orientation input, correspond à la distance AA'. Cette distance correspond également à l'inefficacité d'échelle. Les mesures d'efficacité sous la forme de ratios, compris entre zéro et un, figurent ci-dessous.*

<i>Efficiency technique de A sous hypothèse CRS</i>	<i>Efficiency technique de A sous hypothèse VRS</i>	<i>Efficiency d'échelle de A</i>
$TE_{CRS} = \frac{SA'}{SA}$	$TE_{VRS} = \frac{SA}{SA} = 1$	$SE = \frac{SA'}{SA}$



Réponse pour l'organisation B :

L'organisation B est VRS et CRS efficiente. Elle évolue à sa taille optimale. Les mesures d'efficacité sous la forme de ratios, compris entre zéro et un, figurent ci-dessous.

Efficiency technique de B sous hypothèse CRS	Efficiency technique de B sous hypothèse VRS	Efficiency d'échelle de B
$TE_{CRS} = \frac{UB}{UB} = 1$	$TE_{VRS} = \frac{UB}{UB} = 1$	$SE = \frac{UB}{UB} = 1$

Réponse pour l'organisation C :

L'organisation C est VRS efficiente mais CRS inefficace. Pour devenir CRS efficiente, elle doit se déplacer jusqu'au point C'. L'inefficace technique CRS du point C, en orientation input, correspond à la distance CC'. Cette distance correspond également à l'inefficace d'échelle. Les mesures d'efficacité sous la forme de ratios, compris entre zéro et un, figurent ci-dessous.

Efficiency technique de C sous hypothèse CRS	Efficiency technique de C sous hypothèse VRS	Efficiency d'échelle de C
$TE_{CRS} = \frac{WC'}{WC}$	$TE_{VRS} = \frac{WC}{WC} = 1$	$SE = \frac{WC'}{WC}$

L'efficacité d'échelle peut aisément être calculée lorsque l'efficacité technique CRS et l'efficacité technique VRS sont connues. Comme  $TE_{k,CRS} = TE_{k,VRS} \times SE_k$ , l'efficacité d'échelle est obtenue par la division de l'efficacité technique CRS par l'efficacité technique VRS :

$$SE_k = \frac{TE_{k,CRS}}{TE_{k,VRS}}.$$

Le problème de programmation linéaire à résoudre sous hypothèse de rendements d'échelle variables contient, pour l'organisation  $k$ , une mesure de rendements d'échelle sur les axes des variables,  $c_k$ . Les équations primales sont présentées ci-dessous.

<b>Modèle VRS, orientation output</b>		<b>Modèle VRS, orientation input</b>	
<b>Équation primale</b>		<b>Équation primale</b>	
Minimiser $\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - c_k$	(29)	Maximiser $\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} + c_k$	(33)
Sous contraintes		Sous contraintes	
$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - c_k \geq 0 \quad j=1, \dots, n$	(30)	$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - c_k \geq 0 \quad j=1, \dots, n$	(34)
$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1$	(31)	$\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1$	(35)
$u_r, v_i > 0 \quad \forall r=1, \dots, s; i=1, \dots, m$	(32)	$u_r, v_i > 0 \quad \forall r=1, \dots, s; i=1, \dots, m$	(36)

Les versions duales de ce problème de programmation linéaires sont les suivantes :

<b>Modèle VRS, orientation output</b>		<b>Modèle VRS, orientation input</b>	
<b>Équation duale</b>		<b>Équation duale</b>	
Maximiser $\phi_k$	(37)	Minimiser $\theta_k$	(42)
Sous contraintes		Sous contraintes	
$\phi_k y_{rk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq 0 \quad r=1, \dots, s$	(38)	$y_{rk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq 0 \quad r=1, \dots, s$	(43)
$x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \geq 0 \quad i=1, \dots, m$	(39)	$\theta_k x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \geq 0 \quad i=1, \dots, m$	(44)
$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$	(40)	$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$	(45)
$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$	(41)	$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$	(46)

Enfin, la prise en compte des *slacks* dans le modèle modifie les équations duales de la manière suivante :

<b>Modèle VRS, orientation output</b>	<b>Modèle VRS, orientation input</b>
<b>Équation duale avec slacks</b>	<b>Équation duale avec slacks</b>
Maximiser $\phi_k + \varepsilon \sum_{r=1}^s s_r + \varepsilon \sum_{i=1}^m s_i$ (47)	Minimiser $\theta_k - \varepsilon \sum_{r=1}^s s_r - \varepsilon \sum_{i=1}^m s_i$ (52)
Sous contraintes	Sous contraintes
$\phi_k y_{rk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + s_r = 0 \quad r = 1, \dots, s$ (48)	$y_{rk} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + s_r = 0 \quad r = 1, \dots, s$ (53)
$x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$ (49)	$\theta_k x_{ik} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - s_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$ (54)
$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ (50)	$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ (55)
$\lambda_j, s_r, s_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n; r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m$ (51)	$\lambda_j, s_r, s_i \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n; r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m$ (56)

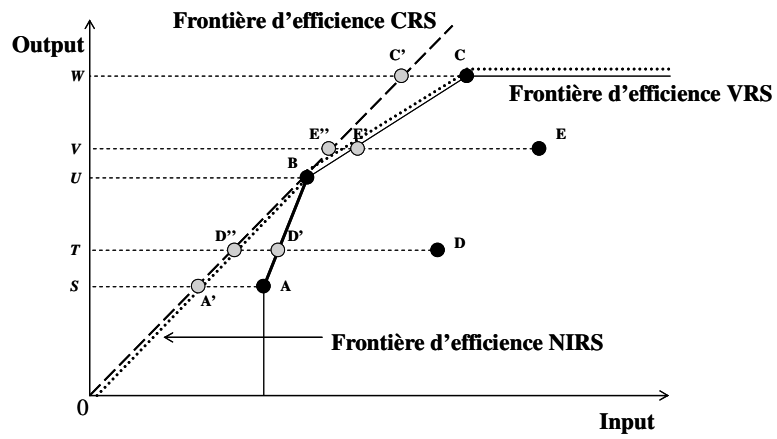
Un pas supplémentaire doit être effectué pour identifier la nature des rendements d'échelle. Cela implique un autre modèle, appelé le modèle des rendements d'échelle non croissants (*non-increasing returns to scale model* –NIRS). Ce modèle est dérivé du modèle VRS dans lequel la

contrainte  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  est remplacée par la contrainte  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1$  (Coelli

*et al.*, 2005). La frontière d'efficacité NIRS a été ajoutée dans la Figure 20 (ligne pointillée). Elle correspond à la frontière CRS de l'origine au point B ; depuis le point B, elle se confond avec la frontière VRS. La nature des inefficiences d'échelle pour chaque organisation est déterminée en comparant les scores d'efficacité NIRS et VRS. Si NIRS TE  $\neq$  VRS TE (comme pour les organisations A et D), les rendements d'échelle sont croissants. Si NIRS TE = VRS TE (mais  $\neq$  CRS TE) (comme pour les organisations E et C), les rendements d'échelle sont décroissants. Enfin, si NIRS TE = VRS TE = CRS TE (comme pour l'organisation B), les rendements d'échelle sont constants.

FIGURE 20:

La nature des rendements d'échelle est identifiée en comparant les modèles NIRS et VRS.



## 5 EXTENSIONS DE LA METHODE DEA

La présente section introduit quatre extensions de la méthode DEA : ajustement de l'efficacité aux conditions de l'environnement, intégration des préférences des décideurs, analyse de sensibilité et analyse de séries temporelles. Un aperçu plus large des principaux développements de la méthode DEA figure dans Cook et Seiford (2008). L'état de l'art en DEA est présenté par Cooper *et al.* (2011).

### 5.1 AJUSTEMENT DE L'EFFICACITE AUX CONDITIONS DE L'ENVIRONNEMENT

Les variables environnementales influencent l'efficacité des organisations mais ne sont pas sous le contrôle (ou l'influence, ou encore la gestion) des managers. En outre, elles ne correspondent pas à des *inputs* ou des *outputs* traditionnels. Plusieurs méthodes permettent de prendre en compte de telles variables. Ces dernières incluent l'approche de Charnes *et al.* (1981), le modèle des catégories de Banker et Morey (1986a) ou le modèle des variables non discrétionnaires, qui inclut directement les variables environnementales dans le modèle DEA (Banker & Morey, 1986b).

La plus convaincante de ces méthodes est cependant la méthode dite des « deux étapes ». Ses avantages sont notamment décrits par Coelli *et al.* (2005, pp. 194-195) et Pastor (2002, p. 899). La méthode des « deux étapes » combine un modèle DEA et une analyse de régression. Dans la première étape, un modèle DEA traditionnel est construit. Il inclut uniquement des variables discrétionnaires (*inputs* et *outputs*). Dans la deuxième étape, les scores d'efficacité sont régressés sur les variables environnementales. Une régression Tobit est souvent utilisée dans cette seconde étape. Cependant, de récentes études démontrent qu'une régression par la méthode des moindres carrés ordinaires est non seulement suffisante pour expliquer les scores d'efficacité (Hoff, 2007) mais souvent plus indiquée que Tobit (McDonald, 2009).

Les coefficients des variables environnementales, estimés par l'analyse de régression, sont utilisés pour ajuster les scores d'efficacités à une condition identique de l'environnement (souvent la condition moyenne). Simar et Wilson (2007, p. 32) fournissent une sélection d'études utilisant la méthode des « deux étapes ». Parmi elles figurent des applications au système éducatif (Chakraborty *et al.*, 2001, McMillan & Datta, 1998, McCarty & Yaisawarng, 1993), aux hôpitaux (Burgess & Wilson, 1998), au secteur de la défense (Barros, 2004), aux forces de police (Carrington *et al.*, 1997), à l'agriculture (Binam *et al.*, 2003) ou aux banques (O'Donnell & van der Westhuizen, 2002). Sueyoshi *et al.* (2010) ou Sibiano et Agasisti (2012) utilisent également cette méthode dans des applications plus récentes au secteur industriel ou au système éducatif.

## 5.2 PREFERENCES

Les décideurs peuvent intégrer leurs préférences concernant l'importance relative, autrement dit les poids respectifs, des *inputs* et des *outputs*. Ce sera le cas notamment lorsqu'ils souhaitent donner la priorité à certaines variables ou lorsque les poids alloués « automatiquement » par la méthode DEA sont considérés comme irréalistes pour certaines organisations. La méthode DEA permet de fixer des restrictions sur les poids des *inputs* et des *outputs*. Cooper *et al.* (2011) et Thanassoulis *et al.* (2004) présentent une revue des modèles qui permettent de fixer des restrictions sur les poids. Une revue antérieure de ces modèles est réalisée par Allen *et al.* (1997). De manière générale, l'imposition de poids aux variables péjorent les scores d'efficacités. Trois approches principales permettent d'intégrer les préférences des décideurs :

- Dyson et Thanassoulis (1988) proposent une approche qui impose des limites absolues supérieures et inférieures aux poids des *inputs* et des *outputs*. Cette méthode est notamment appliquée à la maintenance des autoroutes par Roll *et al.* (1991) et à l'enlèvement des ordures par Liu (2009).

- Charnes *et al.* (1990) développent la méthode *cone-ratio* qui définit une « région » admissible en imposant des restrictions réalistes sur les poids des variables. Cette « région » correspond à un cône convexe. Une application didactique de cette méthode est réalisée par Brockett *et al.* (1997) au secteur bancaire.
- Thompson *et al.* (1986, 1990) proposent la méthode *assurance region*. Cette méthode est en fait un cas spécial de la méthode précédente (*cone-ratio*). Elle impose une contrainte sur l'amplitude relative des poids, formulée sous la forme d'un ratio, à l'intérieur d'une « fourchette » définie par des limites supérieures et inférieures. A titre d'illustration, une contrainte sur le ratio des poids de l'*input* 1 et de l'*input* 2 peut être introduite, comme celle proposée ci-après : 
$$L_{1,2} \leq \frac{V_2}{V_1} \leq U_{1,2},$$
 où  $L_{1,2}$  et  $U_{1,2}$  constituent les limites inférieures et supérieures du ratio « poids de l'*input* 2 ( $V_2$ ) sur poids de l'*input* 1 ( $V_1$ ) ». En conséquence, la méthode *assurance region* limite la « région » des poids en empêchant de trop grandes différences dans les valeurs de ces poids. Sarica et Or (2007) appliquent cette méthode à l'évaluation de la performance des usines énergétiques.

### 5.3 ANALYSE DE SENSIBILITE

Cooper *et al.* (2006, p. 271) définissent le terme « sensibilité » par stabilité ou robustesse. Pour Zhu (2003, p. 217), les frontières d'efficacité des modèles DEA sont stables si les organisations qui sont situées sur ces frontières le restent après que les données aient subi des perturbations (ou des chocs). L'analyse de sensibilité a pour objectif d'identifier l'impact sur les scores d'efficacité de la modification de certains paramètres du modèle DEA.

Une première manière de tester la sensibilité des résultats d'un modèle DEA consiste à ajouter ou à retirer des organisations dans ce modèle.

Dusansky et Wilson (1994, 1995) et Wilson (1993, 1995) développent différentes approches pour y parvenir. Pastor *et al.* (1999) parvient à identifier les observations qui impactent considérablement les autres organisations. Ils déterminent également si les variations d'efficacité dues à l'inclusion d'une organisation donnée dans l'échantillon sont statistiquement significatives.

Une autre manière de tester la sensibilité des résultats d'un modèle DEA consiste à modifier les valeurs des *outputs* et des *inputs*. Cette approche permet de déterminer la variation maximale, dans ses variables, que peut « endurer » une organisation pour conserver son statut d'efficacité. Les variantes de cette approche incluent :

- la modification d'une seule variable d'une organisation efficace, les données des autres organisations demeurant fixes (Charnes *et al.*, 1985) ;
- la modification simultanée et proportionnelle de tous les *outputs* et tous les *inputs* d'une organisation efficace, les données des autres organisations demeurant fixes (Charnes & Neralic, 1992) ;
- la modification simultanée des *outputs* et des *inputs* d'une organisation efficace, ces derniers pouvant être modifiés de manière individuelle (Seiford & Zhu, 1998a, ou Neralic & Wendell, 2004) ; les données des autres organisations demeurent fixes ;
- la modification simultanée et proportionnelle de tous les *outputs* et de tous les *inputs* de toutes les organisations (Seiford & Zhu, 1998b).

Zhu (2001) présente une revue approfondie des analyses de sensibilité.

#### 5.4 SERIES TEMPORELLES

Deux extensions de la méthode DEA permettent d'analyser les séries temporelles : la *window analysis* et l'indice de Malmquist.



La *window analysis*, développée par Charnes *et al.* (1985), examine les changements dans les scores d'efficacité d'un échantillon d'organisations au cours du temps. Une « *window* » est une « fenêtre » d'une certaine période temporelle qui est choisie pour l'analyse. La même organisation est traitée comme si elle était une organisation différente dans chacune des fenêtres. En ce sens, la *window analysis* peut aussi être considérée comme une méthode d'analyse de la sensibilité. A titre d'illustration, un modèle incluant  $n$  organisations disposant de données annuelles et d'une fenêtre (choisie) de  $t$  années nécessitera l'évaluation de  $n \times t$  unités. Pour chaque organisation,  $t$  différents scores d'efficacité seront calculés. La fenêtre est ensuite déplacée d'une période (une année dans notre exemple) et l'analyse d'efficacité est répétée. Yue (1992) développe une application didactique de la *window analysis*. D'autres applications sont disponibles chez Yang et Chang (2009), Avkiran (2004) ou Webb (2003).

L'indice de productivité total de Malmquist a été développé à l'origine par Malmquist (1953) avant d'être intégré dans le contexte de la méthode DEA. Il est utilisé pour mesurer les changements de productivité au cours du temps. L'indice de Malmquist décompose ces changements de productivité en deux effets :

- le premier est appelé « *catch-up* » (ou effet de rattrapage) ; il est dû au changement de l'efficacité technique au cours du temps ;
- le deuxième est appelé « *frontier-shift* » (ou effet lié au déplacement de la frontière d'efficacité) ; il est dû aux changements de technologie qui interviennent au cours du temps (autrement dit le déplacement de la frontière d'efficacité au cours du temps).

Le lecteur se référera à Färe *et al.* (2011) et à Tone (2004) pour des revues actualisées portant sur l'indice de Malmquist. Des applications de l'indice de Malmquist sont réalisées par Coelli et Prasada Rao (2005) ou Behera *et al.* (2011).

## 6 DEA AVEC

### **MICROSOFT EXCEL © SOLVEUR**

#### 6.1 SOLVEUR

Le Solveur d'Excel © est un outil qui permet de déterminer la meilleure manière de résoudre un problème, autrement dit d'optimiser un objectif. La marche à suivre pour charger le Solveur est disponible sur Internet<sup>24</sup>.

Le Solveur permet de résoudre un problème d'optimisation. Un tel problème comprend trois parties ou paramètres à définir (cf. Figure 21) :

- l'« Objectif à définir » correspond à la cellule cible à maximiser ou à minimiser ;
- les « Cellules variables » correspondent aux paramètres qui peuvent être modifiés pour permettre l'optimisation de la cellule cible ;
- les « Contraintes » correspondent aux restrictions placées sur les cellules variables.

---

<sup>24</sup> Pour Microsoft Excel © 2010, elle consiste à cliquer sur l'onglet « Fichier », puis sur « Options » et « Compléments ». Dans la zone « Gérer », il faut sélectionner « Compléments Excel » puis cliquer sur OK. Dans la zone « Macros complémentaires », la case correspondant à « Complément Solveur » doit être sélectionnée. Enfin, la démarche est à valider en cliquant sur OK.

FIGURE 21:  
Trois paramètres sont à définir dans le Solveur.

Paramètres du solveur

Objectif à définir : \$A\$1

À :  Max  Min  Valeur : 0

Cellules variables :

Contraintes :

Ajouter

Modifier

Supprimer

Rétablir tout

Charger/enregistrer

Rendre les variables sans contrainte non négatives

Sélect. une résolution : Simplex PL

Options

Méthode de résolution

Sélectionnez le moteur GRG non linéaire pour des problèmes non linéaires simples de solveur.  
Sélectionnez le moteur Simplex PL pour les problèmes linéaires, et le moteur Évolutionnaire pour les problèmes complexes.

Aide Résoudre Fermer

## 6.2 PROGRAMMATION D'UN MODELE CRS

Considérons à nouveau cinq offices d'état civil (A à E) produisant cette fois-ci deux *outputs* (certificats de naissance et certificats de mariage) avec un *input* (employés en équivalents plein-temps). Les données figurent dans le Tableau 4 ci-dessous. A titre d'illustration, un employé travaille dans l'Office A. Il produit un certificat de naissance et six certificats de mariages.

TABLEAU 4:

Cinq offices d'état civil produisent des certificats de naissance et de mariage avec des employés.

Office d'état civil	Input	Output	
	Employé (x)	Naissances (y <sub>1</sub> )	Mariages (y <sub>2</sub> )
A	1	1	6
B	1	3	8
C	1	4	3
D	1	5	6
E	1	6	2

L'utilisation du Solveur est illustrée dans le cadre du modèle CRS suivant :

**Modèle CRS, orientation *input***  
**Équation primale**

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} \\ \text{Sous contraintes} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1 \\ & u_r, v_i > 0 \quad \forall r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Dans ce modèle, l'objectif est de maximiser la somme pondérée des *outputs* de l'organisation *k*. Deux contraintes sont à considérer dans les paramètres à définir : tout d'abord, la somme pondérée des *inputs* moins la somme pondérée des *outputs* de l'organisation *j* doit être égale ou supérieure à zéro ( $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0$ ); ensuite, la somme

pondérée des *inputs* de l'organisation  $k$  doit être égale à un

$$\left(\sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1\right).$$

Dans un premier temps, une feuille de calcul est préparée dans *Excel* ©, comme celle apparaissant dans la Figure 22. Elle est divisée en deux parties :

- La première partie de la feuille de calcul est composée des lignes 2 et 3. Elle permet de calculer successivement (autrement dit une à la fois) l'efficacité des cinq offices d'état civil. Pour ce faire, les données de chaque office doivent être introduites successivement dans les cellules gris foncé B2 à D2. La Figure 22 contient d'ores et déjà les données de l'Office C. Les cellules B3 à D3 contiennent les poids alloués aux deux *outputs* et à l'*input* de l'Office C (cellules gris clair). Une valeur de 1 a été fixée par défaut à chacun d'eux dans la feuille de calcul. Ces valeurs vont cependant être modifiées par le Solveur dans le processus d'optimisation des scores d'efficacité des offices d'état civil. La cellule E2 contient la somme pondérée des *outputs* de l'office C. La formule associée à la cellule E2 est  $[(B2*\$B\$3) + (C2*\$C\$3)]$ . La cellule F2 contient la somme pondérée des *inputs* de l'Office C. La formule associée à la cellule F2 est  $(D2*\$D\$3)$ . Enfin, la cellule G2 contient le score d'efficacité de l'Office C exprimé en pourcentage (cellule gris clair). La formule associée à la cellule G2 est  $[(E2 / F2)*100]$ . Relevons que le score de 700% qui apparaît dans la feuille de calcul correspond au score d'efficacité calculé avec une valeur de 1 donnée à chacun des poids des *outputs* et des *inputs*. En d'autres termes, ce score n'a pas encore été optimisé sous contraintes par le Solveur.
- La seconde partie de la feuille de calcul est composée par les lignes 6 à 10. Elle contient les données des cinq offices A à E (*output* 1 = colonne B, *output* 2 = colonne C, *input* = colonne D, somme pondérée des *outputs* = colonne E, somme pondérée des *inputs* = colonne F). Les mêmes formules que ci-dessus sont utilisées pour calculer les sommes pondérées des *outputs*

et des *inputs* pour chaque office. Une information additionnelle est introduite dans la colonne G de la feuille de calcul. Elle correspond à la somme pondérée des *inputs* moins la somme pondérée des *outputs* et reflète la première partie de la

contrainte  $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0$ . Cette information sera

utilisée par le Solveur dans le processus d'optimisation. La formule associée à la cellule G6 est (F6 - D6), celle associée à la cellule G7 est (F7 - D7), etc.

FIGURE 22:

Une feuille de calcul *Excel* © prête à l'emploi pour le Solveur.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Output 1 Naissance	Output 2 Mariage	Input 1 Employé	Output pondéré	Input pondéré	Efficience (%)
2	Office d'état civil	4	3	1	7.00	1.00	700.00
3	Poids	1.00	1.00	1.00			
4							
5		Output 1 Naissance	Output 2 Mariage	Input 1 Employé	Output pondéré	Input pondéré	Input pondéré moins output pondéré
6	Office A	1	6	1	7.00	1.00	-6.00
7	Office B	3	8	1	11.00	1.00	-10.00
8	Office C	4	3	1	7.00	1.00	-6.00
9	Office D	5	6	1	11.00	1.00	-10.00
10	Office E	6	2	1	8.00	1.00	-7.00

Une fois que la feuille de calcul est préparée, les paramètres du Solveur doivent être définis ainsi :

- L'objectif est de maximiser la somme pondérée des *outputs* de l'office  $k$  ( $\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}$ ). La cellule \$E\$2 doit être spécifiée dans le paramètre consacré à l'objectif à définir. En complément, l'option « Max » doit être activée.
- Pour permettre l'optimisation de l'objectif (cellule cible \$E\$2), les cellules variables doivent être définies. Elles correspondent aux poids alloués aux *outputs* et aux *inputs*. Les cellules \$B\$3 à \$D\$3 (\$B3:\$D\$3) doivent être spécifiées dans le paramètre consacré aux cellules variables.

- Finalement, les restrictions placées sur les cellules variables doivent être introduites en tant que contraintes. Le bouton « Ajouter » permet d'introduire les contraintes les unes après les autres. En cliquant sur ce bouton, la fenêtre « Ajouter une contrainte » apparaît. Elle permet de définir les trois paramètres nécessaires à la contrainte : la cellule de référence, le signe de la contrainte (<=, = ou >=) et la valeur de la contrainte. La première contrainte du modèle CRS

$$\left( \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0 \right)$$

est spécifiée ainsi : la cellule de référence est \$G\$6:\$G\$10, le signe est >= et la valeur de la contrainte est 0 (\$G\$6:\$G\$10>=0). La seconde contrainte

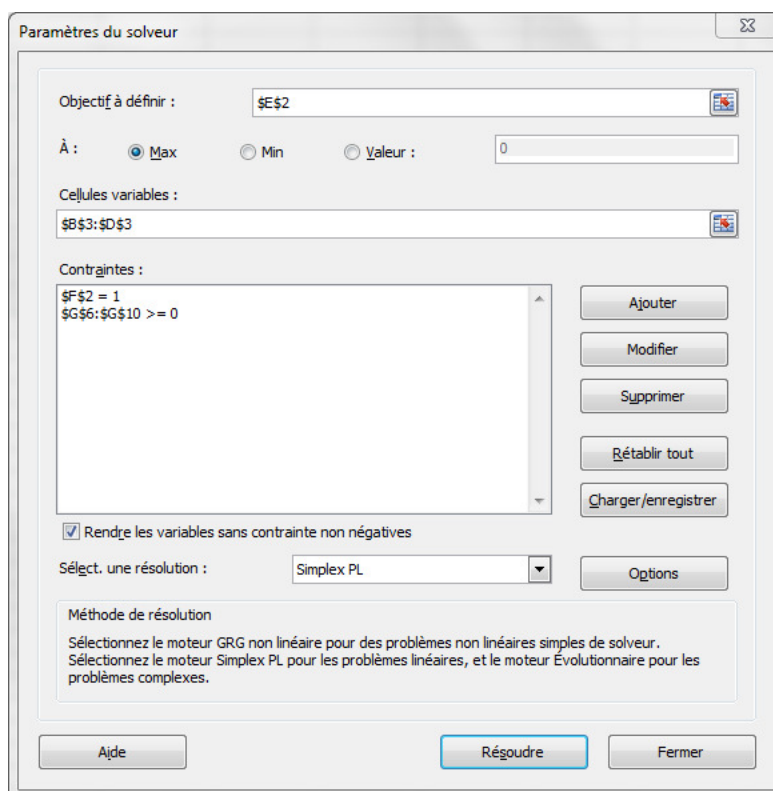
$$\left( \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1 \right)$$

est spécifiée ainsi : la cellule de référence est \$F\$2, le signe est = et la valeur de la contrainte est 1 (\$F\$2=1).

Relevons que cette contrainte permet de conserver le niveau d'*inputs* constant.

La Figure 23 ci-dessous représente les paramètres du Solveur qui viennent d'être définis.

FIGURE 23:  
Les paramètres du Solveur sont spécifiés pour l'optimisation.



Finalement, la résolution Simplex LP doit être sélectionnée et l'option « Rendre les variables sans contrainte non négatives » activée (cf. Figure 23). Cela indique que le modèle est linéaire avec des valeurs de variables non négatives (ce qui permet ainsi de prendre en compte la dernière « contrainte »  $u_r, v_i > 0$ ).

Le bouton « Résoudre » permet d'exécuter le modèle. Le Solveur cherche alors parmi toutes les solutions envisageables celle qui présente la valeur la plus élevée dans la cellule cible. L'Office d'état civil C obtient ainsi un score d'efficacité de 73,08% (cellule G2). Ce score est



obtenu avec des poids de 0,15, 0,04 et 1 alloués respectivement à l'*output* 1, à l'*output* 2 et à l'*input* 1 (cellules B3, C3 et D3). Une fenêtre « Résultat du Solveur » apparaît après avoir cliqué sur le bouton « Résoudre ». Avant de résoudre le problème à nouveau pour les autres offices, l'option « Rétablir les valeurs d'origine » doit être sélectionnée et validée en cliquant sur OK.

Pour mesurer l'efficacité de l'Office d'état civil A (par exemple), il est nécessaire de remplacer les valeurs des cellules B3 à D3 (qui correspondent à l'Office C) par les valeurs des cellules B6 à D6 (qui correspondent à l'Office A). La résolution du Solveur pour l'Office A détermine un score d'efficacité de 75%.

---

### Exercice 6

L'objectif de cet exercice consiste à programmer le modèle CRS ci-dessous dans le Solveur de *Microsoft Excel* ©. Les mêmes données que celles contenues dans le Tableau 4 ci-dessus sont à utiliser. Relevons que le modèle CRS à programmer dans cet exercice est équivalent à celui développé ci-dessus. Cependant, à la place de maximiser les sommes pondérées des *outputs*, il s'agit ici de minimiser les sommes pondérées des *inputs*.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimiser} && \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \\
 &\text{Sous contraintes} && \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& \sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1 \\
 &&& u_r, v_i > 0 \quad \forall r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

**Tâches à effectuer**

- a) Préparer une feuille de calcul dans *Excel* © permettant l'utilisation du Solveur.

*Réponse : la même feuille de calcul que celle apparaissant dans la Figure 22 peut être utilisée.*

- b) Quelle est la cellule à optimiser ?

*Réponse : la cellule à optimiser est \$F\$2.*

- c) Dans ce cas, les *outputs* sont-ils maximisés ou les *inputs* minimisés ?

*Réponse : les inputs sont minimisés (l'option Min doit être sélectionnée dans le Solveur).*

- d) Quelle équation du modèle CRS est-elle optimisée par le Solveur ?

*Réponse :  $\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}$ . Cette équation correspond à la minimisation des sommes pondérées des inputs.*

- e) Quelles variables peuvent-elles être modifiées pendant le processus d'optimisation ?

*Réponse : Les poids alloués à l'output 1, l'output 2 et l'input 3 peuvent être modifiés (cellules B3, C3 et D3).*

- f) Quelle contrainte du Solveur correspond à l'équation

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \geq 0 \text{ du modèle CRS ?}$$

*Réponse : \$G\$6:\$G\$10 >= 0*

- g) Quelle contrainte du Solveur correspond à l'équation  $\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} = 1$

du modèle CRS ?

*Réponse : \$E\$2=1. Cette contrainte assure que les sommes pondérées des outputs sont égales à 1 (autrement dit que le niveau de production des outputs est maintenu constant).*

- h) Quels sont les scores d'efficacité obtenus ?

*Réponse : A=75, B=100, C=73,08, D=100 et E=100*

---

## REFERENCES

- Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R. G. & Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, 73(1), 13-34.
- Avkiran, N. K. (2004). Decomposing technical efficiency and window analysis. *Studies in Economics and Finance*, 22(1), 61-91.
- Banker, R. D., Charnes, A. & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.
- Banker, R. D. & Morey, R. C. (1986a). Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs. *Operations Research*, 34(4), 513-521.
- Banker, R. D. & Morey, R. C. (1986b). The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 32(12), 1613-1627.
- Barr, R. (2003). DEA Software Tools and Technology: A State-of-the-Art survey. In W. W. Cooper, L. M. Seiford & J. Zhu (Eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis* (pp. 539-566). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Barros, C. P. (2004). Measuring performance in defence-sector companies in a small NATO member country. *Journal of Economic Studies*, 31(2), 112-128.
- Behera, S. K., Faroquie, J. A. & Dash, A. P. (2011). Productivity change of coal-fired thermal power plants in India: a Malmquist index approach. *IMA Journal of Management Mathematics*, 22(4), 387-400.
- Binam, J. N., Sylla, K., Diarra, I. & Nyambi, G. (2003). Factors affecting technical efficiency among coffee farmers in Côte d'Ivoire: evidence from the centre west region. *R&D Management*, 15(1), 66-76.
- Bogetoft, P. & Otto, L. (2010). *Benchmarking with DEA, SFA, and R*. New York: Springer.

- Brockett, P. L., Charnes, A., Cooper, W. W., Huang, Z. M. & Sun, D. B. (1991). Data Transformations in DEA Cone Ratio Envelopment Approaches for Monitoring Bank Performance. *Journal of Operational Research*, 98(2), 250-268.
- Burgess, J. F. & Wilson, P. W. (1998). Variation in inefficiency among US hospitals. *Canadian Journal of Operational Research and Information Processing (INFOR)*, 36(3), 84-102.
- Carrington, R., Puthuchery, N., Rose, D. & Yaisawarng, S. (1997). Performance measurement in government service provision: the case of police services in New South Wales. *Journal of Productivity Analysis*, 8(4), 415-430.
- Chakraborty, K., Biswas, B. & Lewis, W. C. (2001). Measurement of technical efficiency in public education: a stochastic and nonstochastic production approach. *Southern Economic Journal*, 67(4), 889-905.
- Charnes, A., Clarke, C., Cooper, W. W. & Golany, B. (1984). A development study of DEA in measuring the effect of maintenance units in the U.S. Air Force. *Annals of Operations Research*, 2(1), 95-112.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Huang, Z. M. & Sun, D. B. (1990). Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks. *Journal of Econometrics*, 46(1-2), 73-91.
- Charnes, A., Cooper, W. W. & Rhodes E. L. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- Charnes, A., Cooper, W. W. & Rhodes E. L. (1981). Evaluating program and managerial efficiency: An application of DEA to program follow through. *Management Science*, 27(6), 668-697.
- Charnes, A., Haag, S., Jaska, P. & Semple, J. (1992). Sensitivity of efficiency calculations in the additive model of data envelopment analysis. *International Journal of System Sciences*, 23(5), 789-798.
- Charnes, A. & Neralic, L. (1992). Sensitivity analysis in data envelopment analysis. *Glasnik Matematički*, 27(47), 191-201.

- Coelli, T. J. (1996). *A Guide to DEAP Version 2.1: A Data Envelopment Analysis (Computer) Program* (CEPA Working Paper 96/08). Brisbane: Centre for Efficiency and Productivity Analysis, University of Queensland.
- Coelli, T. J. (1998). A Multi-stage Methodology for the Solution of Oriented DEA Models. *Operations Research Letters*, 23(3-5), 143-149.
- Coelli, T. J. & Perelman, S. (1996). *Efficiency measurement, Multiple-output Technologies and Distance Functions: With Application to European Railways* (CREPP Working Paper 96/05). Liège: Centre de Recherche en Economie Publique et de la Population, University of Liège.
- Coelli, T. J. & Perelman, S. (1999). A Comparison of Parametric and Non-Parametric Distance Functions: With Application to European Railways. *European Journal of Operational Research*, 117(2), 326-339.
- Coelli, T. J. & Prasada Rao, D. S. (2005). Total factor productivity growth in agriculture: a Malmquist index analysis of 93 countries, 1980-2000. *Agricultural Economics*, 32(s1), 115-134.
- Coelli, T. J., Prasada Rao, D. S., O'Donnell, C. J. & Battese, G. E. (2005). *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*. New York: Springer.
- Cook, W. D. & Seiford, L. M. (2008). Data envelopment analysis (DEA) – Thirty years on. *European Journal of Operational Research*, 192(1), 1-17.
- Cooper, W. W., Ruiz J. L. & Sirvent, I. (2011). Choices and Uses of DEA Weights. In W. W. Cooper, L. M. Seiford & J. Zhu (Eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis* (pp. 93-126). New York: Springer.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Tone, K. (2006). *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses*. New York: Springer.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis: A comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. New York: Springer.

- Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Zhu, J. (2004). *Handbook on Data Envelopment Analysis* (1<sup>st</sup> ed.). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Zhu, J. (2011). *Handbook on Data Envelopment Analysis* (2<sup>nd</sup> ed.). New York: Springer.
- Dantzig, G. B. (1951). Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. In T. C. Koopmans (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation* (pp. 339-347). New York: John Wiley and Sons.
- Dusansky, R. & Wilson, P. W. (1994). Measuring efficiency in the care of developmentally disabled. *Review of Economics and Statistics*, 76(2), 340-345.
- Dusansky, R. & Wilson, P. W. (1995). On the relative efficiency of alternative modes of producing public sector output: The case of developmentally disabled. *European Journal of Operational Research*, 80(3), 608-628.
- Dyson, R. G. & Thanassoulis, E. (1988). Reducing weight flexibility in DEA. *Journal of the Operational Research Society*, 39(6), 563-576.
- Emrouznejad, A., Parker, B. R. & Tavares G. (2008). Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA. *Socio-Economic Planning Sciences*, 42(3), 151-157.
- Färe, R., Grosskopf, S. & Margaritis, D. (2011). Malmquist Productivity Indexes and DEA. In W. W. Cooper, L. M. Seiford & J. Zhu (Eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis* (pp. 127-150). New York: Springer.
- Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of Royal Statistical Society*, 120(3), 253-281.
- Hoff, A. (2007). Second stage DEA: Comparison of approaches for modelling the DEA score. *European Journal of Operational Research*, 181(1), 425-435.

- Johnes, J. (2004). Efficiency measurement. In G. Johnes & J. Johnes (Eds.), *International Handbook on the Economics of Education* (pp. 613-742). Cheltenham: Edward Elgar Publishing.
- Liu, C.-C. (2009). A study of optimal weights restriction in Data Envelopment Analysis. *Applied Economics*, 41(14), 1785-1790.
- McCarty, T. A. & Yaisawarng, S. (1993). Technical efficiency in New Jersey school districts. In H. O. Fried, C. A. K Lovell & S. S. Schmidt (Eds.), *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications* (pp. 271-287). Oxford University Press: New York.
- McDonald, J. (2009). Using least squares and tobit in second stage DEA efficiency analyses. *European Journal of Operational Research*, 197(2), 792-798.
- McMillan, M. L. & Datta, D. (1998). The relative efficiencies of Canadian universities: a DEA perspective. *Canadian Public Policy-Analyse de Politiques*, 24(4), 485-511.
- Malmquist, S. (1953). Index numbers and indifference surfaces. *Trabajos de Estadística*, 4(2), 209-242.
- Neralic, L. (2004). Preservation of efficiency and inefficiency classification in data envelopment analysis. *Mathematical Communications*, 9(1), 51-62.
- Neralic, L. & Wendell, R. E. (2004). Sensitivity in data envelopment analysis using an approximate inverse matrix. *Journal of the Operational Research Society*, 55(11), 1187-1193.
- O'Donnell, C. J. & van der Westhuizen, G. (2002). Regional comparisons of banking performance in SouthAfrica. *South African Journal of Economics*, 70(3), 485-518.
- Pastor, J. M. (2002). Credit risk and efficiency in the European banking system: A three-stage analysis. *Applied Financial Economics*, 12(12), 895-911.
- Pastor, J. M., Ruiz, J. L. & Sirvent, I. (1999). A statistical test for detecting influential observations in DEA. *European Journal of Operational Research*, 115(3), 542-554.

- Rhodes, E. L. (1978). *Data envelopment analysis and approaches for measuring the efficiency of decision making units with an application to program follow through in U.S. education* (Doctoral dissertation). School of Urban and Public Affairs, Carnegie-Mellon University.
- Roll, Y., Cook, W. D. & Golany B. (1991). Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis. *IEE Transactions*, 23(1), 2-9.
- Sarica, K. & Or, I. (2007). Efficiency assessment of Turkish power plants using data envelopment analysis. *Energy*, 32(8), 1484-1499.
- Scheel, H. (2000). *EMS: Efficiency Measurement System User's Manual*. Retrieved from Technische Universität Dortmund, Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät Web site: <http://www.wiso.tu-dortmund.de/wiso/de/fakultaet/personen/institut/or/EXT-HOSC.html>
- Seiford, L. M. & Zhu, J. (1998a). Stability regions for maintaining efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 108(1), 127-139.
- Seiford, L. M. & Zhu, J. (1998b). Sensitivity analysis of DEA models for simultaneous changes in all the data. *Journal of the Operational Research Society*, 49(10), 1060-1071.
- Sibiano, P. & Agasisti, T. (2012). Efficiency and heterogeneity of public spending in education among Italian regions. *Journal of Public Affairs*, doi:10.1002/pa. 1404.
- Simar, L. & Wilson P. W. (2007). Estimation and inference in two-stage, semi-parametric models of production processes. *Journal of Econometrics*, 136(1), 31-64.
- Sueyoshi, T., Goto, M. & Omi, Y. (2010). Corporate governance and firm performance: Evidence from Japanese manufacturing industries after the lost decade. *European Journal of Operational Research*, 203(3), 724-736.



- Thanassoulis, E, Portela, M. C. S. & Allen, R. (2004). Incorporating value judgements in DEA. In W. W. Cooper, L. M. Seiford & J. Zhu (Eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis* (pp. 99-138). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Thanassoulis, E., Portela, M. C. S., & Despic, O. (2008). Data Envelopment Analysis: The Mathematical Programming Approach to Efficiency Analysis. In H. O. Fried, C. A. Lovell, & S. S. Schmidt, *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth* (pp. 251-420). New York: Oxford University Press.
- Thomson, R. G., Langemeier, L. N., Lee, C.-T., Lee, E. & Thrall, R. M. (1990). The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of Econometrics*, 46(1-2), 93-108.
- Thomson, R. G., Singleton Jr., F. D., Thrall, R. M. & Smith, B. A. (1986). Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas. *Interfaces*, 16(6), 35-49.
- Tone, K. (2004). Malmquist productivity index – Efficiency change over time. In W. W. Cooper, L. M. Seiford & J. Zhu (Eds.), *Handbook on Data Envelopment Analysis* (pp. 203-227). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Webb, R. (2003). Level of efficiency in UK retail banks: a DEA window analysis. *International Journal of the Economics of Business*, 10(3), 305-322.
- Wilson, P. W. (1993). Detecting outliers in deterministic non-parametric frontier models with multiple outputs. *Journal of Business and Economic Statistics*, 11(3), 319-323.
- Wilson, P. W. (1995). Detecting influential observations in data envelopment analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 6(1), 27-45.
- Yang, H.-H. & Chang, C.-Y. (2009). Using DEA window analysis to measure efficiencies of Taiwan's integrated telecommunication firms. *Telecommunications Policy*, 33(1-2), 98-108.

Yue, P. (1992). Data Envelopment Analysis and Commercial Bank Performance: A Primer with Applications to Missouri Banks. *Federal Reserve Bank of St Louis Review*, 74(1), 31-45.

Zhu, J. (2001). Super-efficiency and DEA sensitivity analysis. *European Journal of Operational Research*, 129(2), 443-455.

Zhu, J. (2003). *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking*. New York: Springer.

Zhu, J. & Cook, W. D. (2008). *Data Envelopment Analysis: Modeling Operational Processes and Measuring Productivity*. Seattle: CreateSpace.